

5 Geometría analítica plana

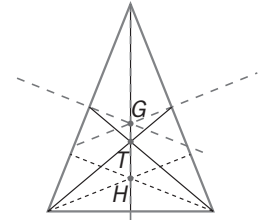
ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Halla las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(-2, 5)$ y $B(8, 11)$.

El punto medio es $M(3, 8)$.

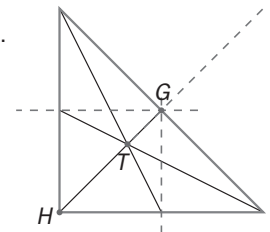
5.II. Dibuja un triángulo isósceles y traza las medianas, alturas y mediatrices del mismo. Localiza el baricentro, ortocentro y circuncentro del triángulo. ¿Con qué recta coincide la recta de Euler en este caso?

G es el baricentro, T es el circuncentro y H es el ortocentro. La recta de Euler en este caso coincide con la mediana, la altura y la mediatriz del lado desigual que, por tanto, son la misma recta.



5.III. Dibuja un triángulo rectángulo y traza las medianas, alturas y mediatrices del mismo. Localiza la recta de Euler de este triángulo.

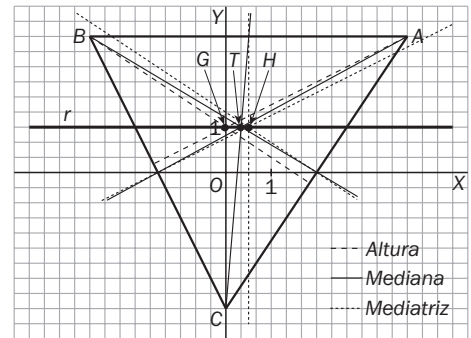
La recta de Euler en este caso coincide con la mediana sobre la hipotenusa.



5.IV. Dibuja el triángulo de vértices $A(4, 3)$, $B(-3, 3)$ y $C(0, -3)$.

- Calcula las coordenadas del baricentro.
- Dibuja sus medianas y el baricentro.
- Dibuja sus alturas y el ortocentro.
- Dibuja sus mediatrices y el circuncentro.
- Dibuja la recta de Euler.

a) $G(1\frac{1}{3}, 1)$



EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1*. Comprueba si los puntos $A(-2, 3)$, $B(2, -3)$ y $C(-2, 5)$ pertenecen o no a la recta que pasa por $P(-2, 6)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.

Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 - 3\lambda \end{cases}$

En este caso se trata de la recta vertical $x = -2$. Cualquier punto cuya abscisa sea -2 pertenece a la recta, pues siempre existe un valor real de λ tal que $y = 6 - 3\lambda$

$A(-2, 3): \begin{cases} -2 = -2 \\ 3 = 6 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow A \in r$ $B(2, -3): \begin{cases} 2 \neq -2 \\ -3 = 6 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow B \notin r$ $C(-2, 5): \begin{cases} -2 = -2 \\ 5 = 6 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C \in r$

Cualquier punto de coordenadas $(-2, y)$ pertenece a la recta, por ejemplo $(-2, 6)$ y $(-2, 0)$.

5.2. Considera la recta que pasa por el punto $M(5, -2)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v} = (-2, 2)$.

- Calcula su ecuación vectorial.
- Halla sus ecuaciones paramétricas.

a) La ecuación vectorial es: $(x, y) = (5, -2) + \lambda(-2, 2)$ para cualquier número real λ

b) Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} 5 - 2\lambda \\ -2 + 2\lambda \end{cases}$

5.3. En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

- a) $A(2, -5)$ y $B(1, -3)$ b) $A(3, -3)$ y $B(-3, -3)$ c) $A(1, 4)$ y $B(1, -3)$ d) $A(-2, -4)$ y $B(3, -2)$

a) El vector director es $\overline{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por $A(2, -5)$.

$$\text{Por tanto: } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x-4 = -y-5 \Rightarrow AB \equiv 2x+y+1=0$$

b) El vector director es $\overline{AB} = (-6, 0)$ y la recta pasa por $A(3, -3)$.

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} x-3 = -6\lambda \\ y+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow AB \equiv y = -3$$

c) El vector director es $\overline{AB} = (0, -7)$ y la recta pasa por $A(1, 4)$.

$$\text{Por tanto: } \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-4 = -7\lambda \end{cases} \Rightarrow AB \equiv x = 1$$

d) El vector director es $\overline{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por $A(-2, -4)$.

$$\text{Por tanto: } \frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x+4 = 5y+20 \Rightarrow AB \equiv 2x-5y-16=0$$

5.4. Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices: $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ y $C(0, -3)$.

Las medianas son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

En primer lugar se calculan los puntos medios de los lados:

Lado AB : $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; lado BC : $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; lado CA : $N(1, 0)$

La mediana correspondiente al lado AB pasa por C y M , y su vector director es: $\overline{CM} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \parallel \vec{u} = (1, 9)$.

Luego la ecuación de la recta es $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{9} \Rightarrow 9x = y+3 \Rightarrow CM \equiv 9x - y - 3 = 0$.

La mediana correspondiente al lado BC pasa por A y P , y su vector director es: $\overline{AP} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right) \parallel (5, 9)$.

Luego la ecuación de la recta es $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{9} \Rightarrow 9x-18 = 5y-15 \Rightarrow AP \equiv 9x-5y-3=0$.

La mediana correspondiente al lado CA pasa por B y N , y su vector director es: $\overline{BN} = (2, 0)$.

Luego la ecuación de la recta es $BN \equiv y = 0$.

5.5. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto $A(-3, 5)$.

La recta paralela al eje OX que pasa por A es $y = 5$, y la recta paralela al eje OY que pasa por A es $x = -3$.

5.6. Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\overline{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \parallel \vec{u} = (-6, 1)$

Vector normal: $(1, 6)$

5.7. Una recta tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$.

Escribe su ecuación normal, su ecuación normal canónica y su ecuación general.

Ecuación general:

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por A , ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es: $2x - 3y + 8 = 0$.

Ecuación normal:

Si $X(x, y)$ es un punto de la recta, se verifica que $\overline{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x+1, y-2) \cdot (2, -3) = 0 \Rightarrow 2(x+1) - 3(y-2) = 0$

Ecuación normal canónica:

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y + \frac{8}{\sqrt{13}} = 0$$

5.8. Indica un vector director y otro normal de la recta de ecuación $-3x + 2y - 4 = 0$.

Un vector normal es $\vec{n} = (-3, 2)$. Un vector director es $\vec{u} = (2, 3)$.

5.9. Escribe las ecuaciones general, normal y normal canónica de la recta que pasa por $A(3, -3)$ y $B(-1, 2)$.

El vector director es $\overline{AB} = (-4, 5)$. El vector normal es: $(5, 4)$. Por tanto:

La ecuación normal es: $5 \cdot (x - 3) + 4 \cdot (y + 3) = 0$

La ecuación general es: $5x - 15 + 4y + 12 = 0 \Rightarrow 5x + 4y - 3 = 0$

La ecuación normal canónica es: $\frac{5}{\sqrt{5^2 + 4^2}}x + \frac{4}{\sqrt{5^2 + 4^2}}y - \frac{3}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{41}}x + \frac{4}{\sqrt{41}}y - \frac{3}{\sqrt{41}} = 0$.

5.10. Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.

$\overline{AB} = (1, 6)$ es un vector normal a la recta. Por tanto, la ecuación de la recta es de la forma $x + 6y + k = 0$. Como pasa por el punto C , ha de ser $3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$. Por tanto, la ecuación pedida es $x + 6y - 3 = 0$.

5.11. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por A , ha de ser $4 = \frac{1}{2}(-2) + n \Rightarrow n = 5$.

Por tanto, la ecuación pedida es $y = \frac{1}{2}x + 5$, o bien en su forma general: $x - 2y + 10 = 0$.

5.12. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 5)$ y $B(2, -2)$.

Sea $y = mx + n$ la ecuación explícita de la recta. Los puntos dados han de verificar la ecuación, por lo que se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5 = -m + n \\ -2 = 2m + n \end{cases} \xrightarrow{E_2 - E_1} \begin{cases} m = \frac{-7}{3} \\ n = -2 + \frac{14}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{La pendiente es } m = \frac{-7}{3}, \text{ y la ordenada en el origen, } n = \frac{8}{3}.$$

5.13. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $2x + 5y - 5 = 0$ y $3x - 5y + 5 = 0$

b) $3x + 5y - 5 = 0$ y $9x + 15y + 5 = 0$

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ son rectas secantes. Se cortan en: $\begin{cases} 3x + 5y - 5 = 0 \\ 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10y - 10 = 0 \Rightarrow y = 1, x = 0 \Rightarrow P(0, 1)$.

b) $\frac{3}{9} = \frac{5}{15} \neq \frac{-5}{5} \Rightarrow$ son rectas paralelas.

5.14*. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $s: x - y + 5 = 0$ y $t: x + y + 1 = 0$.

Se calcula el punto de intersección de s y t : $\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(-3, 2)$

Todas las paralelas a r son de la forma $2x + y + k = 0$. Como tiene que pasar por $(-3, 2)$, se tiene: $-6 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

La ecuación de la recta buscada es $2x + y + 4 = 0$

5.15. Comprueba si los siguientes triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos:

a) $A(-2, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(3, 7)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $C\left(1, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$

a) Se trata de un triángulo escaleno. En efecto:

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \text{ u}, \overline{CB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ u}, \overline{AC} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \text{ u}$$

b) Se trata de un triángulo equilátero. En efecto:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 0} = 1 \text{ u}, \overline{CB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \text{ u},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \text{ u}$$

5.16. a) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(2, 2)$.

b) Halla la distancia del punto $C(10, 0)$ a la recta que pasa por A y B .

c) ¿Cuál es la posición relativa de A , B y C ?

a) La recta tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$, y pasa por $A(-2, 3)$. Por tanto, su ecuación es:

$$AB \equiv \frac{x + 2}{4} = \frac{y - 3}{-1} \Rightarrow -x - 2 = 4y - 12 \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$$

b) La distancia es $d(C, AB) = \frac{|10 + 4 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{0}{\sqrt{17}} = 0$, lo que significa que C pertenece a la recta AB .

c) A , B y C están alineados.

5.17. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x - 4y = 0$ y $s: 2x + 2y + 3 = 0$

b) $r: y = x - 5$ y $s: y = 2x + 2$

a) Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (3, -4)$ y $\vec{n}_2 = (2, 2)$. Luego:

$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|6 - 8|}{\sqrt{9 + 16} \sqrt{4 + 4}} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0,141 \Rightarrow \alpha = 81^\circ 52'$$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.

$$\text{Luego } \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - 2}{1 + 2} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18^\circ 26'$$

5.18. Calcula los ángulos del triángulo de vértices $A(4, 0)$, $B(-1, 6)$ y $C(-6, 0)$, e indica qué tipo de triángulo es en función de sus ángulos.

Los vectores directores de los lados son: $\overrightarrow{AB} = (-5, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-10, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-5, -6)$. A partir de estos calculamos los ángulos utilizando la expresión del ángulo entre dos vectores:

$$\cos A = \cos(\widehat{AB, AC}) = \frac{50 + 0}{\sqrt{25 + 36} \sqrt{100 + 0}} = 0,640 \Rightarrow A = 50^\circ 12'$$

$$\cos B = \cos(\widehat{BA, BC}) = \frac{-25 + 36}{\sqrt{25 + 36} \sqrt{25 + 36}} = 0,180 \Rightarrow B = 79^\circ 36'$$

$$\cos C = \cos(\widehat{CA, CB}) = \frac{50 + 0}{10 \sqrt{25 + 36}} = 0,640 \Rightarrow C = 50^\circ 12'$$

Se trata de un triángulo acutángulo e isósceles.

5.19. Calcula el simétrico de $P(-2, 3)$ respecto del punto $M(1, -4)$.

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado. M es el punto medio del segmento PP' . Por tanto:

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \frac{-2 + a}{2} = 1 \Rightarrow a = 4 \quad \frac{3 + b}{2} = -4 \Rightarrow b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

5.20. Calcula el simétrico de $P(5, -1)$ respecto de la recta $r: x - y + 3 = 0$.

En primer lugar se calcula la recta perpendicular a r que pasa por P . Dicha recta tiene como vector director el vector normal de r , $n = (1, -1)$, luego:

$$s \equiv \frac{x - 5}{1} = \frac{y + 1}{-1} \Rightarrow -x + 5 = y + 1 \Rightarrow s \equiv x + y - 4 = 0$$

El punto de intersección de ambas rectas es:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado. M es el punto medio del segmento PP' . Por tanto:

$$\frac{5 + a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -4 \quad \frac{-1 + b}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = 8 \Rightarrow P'(-4, 8)$$

5.21. Calcula la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de $y = x + 1$.

Primero calculamos el punto Q de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría:
 $r \equiv y = x + 1$

$$Q = r \cap OY \equiv \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0, 1)$$

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico P' de otro punto cualquiera, P , del eje de ordenadas, ya que la recta buscada será determinada por los puntos Q y P' .

El punto $P(0, 3)$ pertenece al eje Y . El vector director de r es $(1, 1)$, luego el de la recta perpendicular es $(1, -1)$.

La recta perpendicular a r por el punto P es $y = -x + 3$, que corta a r en $M(1, 2)$. Para hallar el punto P' , simétrico de P respecto de r , se utiliza que M es el punto medio del segmento PP' , con lo que debe ser $P'(2, 1)$. Por lo tanto, la recta simétrica del eje Y respecto de r es la que pasa por Q y P' , cuya ecuación es $y = 1$.

5.22. Halla el extremo B del segmento \overline{AB} siendo $A(2, 1)$, y la mediatriz del segmento es $r: x + 2y - 9 = 0$.

Sea $B(a, b)$. Como la mediatriz es perpendicular al segmento: $\overline{AB} = (a - 2, b - 1) = k(1, 2)$

El punto medio de AB pertenece a r , por lo que $\frac{2 + (2 + k)}{2} + 2 \frac{1 + (1 + 2k)}{2} - 9 = 0 \Rightarrow k = 2$

Por tanto, el extremo es $B(4, 5)$.

5.23. Dadas las rectas $r: x - 3y + 4 = 0$ y $s: x + y = 0$, calcula sus bisectrices y comprueba que:

- a) Se cortan en el punto de intersección de r y s . b) Son perpendiculares.

En primer lugar se calculan las ecuaciones de las bisectrices. Sea $X(x, y)$ un punto genérico de la bisectriz. Se tiene que:

$$d(X, r) = d(X, s) \Rightarrow \frac{x - 3y + 4}{\sqrt{1 + 9}} = \pm \frac{x + y}{\sqrt{1 + 1}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - 3y + 4}{\sqrt{10}} = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_1 = (\sqrt{5} - 1)x + (\sqrt{5} + 3)y - 4 = 0 \\ \frac{x - 3y + 4}{\sqrt{10}} = -\frac{x + y}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_2 = (\sqrt{5} + 1)x + (\sqrt{5} - 3)y + 4 = 0 \end{cases}$$

a) El punto de corte de las rectas es $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1, x = -1 \Rightarrow P(-1, 1)$

P verifica la ecuación de cada una de las bisectrices, luego es su punto de corte:

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - 1)(-1) + (\sqrt{5} + 3) \cdot 1 - 4 = -\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} + 3 - 4 = 4 - 4 = 0 \\ (\sqrt{5} + 1)(-1) + (\sqrt{5} - 3) \cdot 1 + 4 = -\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - 3 + 4 = -4 + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Los vectores perpendiculares a b_1 , $\vec{n}_1 = (\sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 3)$, y a b_2 , $\vec{n}_2 = (\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} - 3)$, cumplen $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5 - 1 + 5 - 9 = 0 \Rightarrow$ son perpendiculares y, por tanto, también lo son las dos bisectrices.

5.24. Dado el triángulo de vértices $A(5, 1)$, $B(3, 7)$ y $C(-2, 3)$:

- a) Calcula el circuncentro y el radio de la circunferencia circunscrita.
 b) Calcula el incentro y el radio de la circunferencia inscrita.

a) El circuncentro, $T(a, b)$, equidista de los tres vértices. Se tiene:

$$\begin{cases} \sqrt{(5 - a)^2 + (1 - b)^2} = \sqrt{(-2 - a)^2 + (3 - b)^2} \\ \sqrt{(5 - a)^2 + (1 - b)^2} = \sqrt{(3 - a)^2 + (7 - b)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5 - a)^2 + (1 - b)^2 = (-2 - a)^2 + (3 - b)^2 \\ (5 - a)^2 + (1 - b)^2 = (3 - a)^2 + (7 - b)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14a + 4b = -13 \\ -4a + 12b = 32 \end{cases} \Rightarrow E_2 - 3E_1 \Rightarrow 38a = 71 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{71}{38} \\ b = \frac{32 + 4a}{12} = \frac{32 + \frac{142}{19}}{12} = \frac{125}{38} \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow El circuncentro es $T\left(\frac{71}{38}, \frac{125}{38}\right)$.

El radio de la circunferencia circunscrita es $R = d(T, A) = \sqrt{\left(5 - \frac{71}{38}\right)^2 + \left(1 - \frac{125}{38}\right)^2} = \frac{\sqrt{21730}}{38} = 3,88 \text{ u.}$

b) Para calcular el incentro hallamos las bisectrices de los ángulos \hat{A} y \hat{B} a partir de las igualdades $d(P, AB) = d(P, AC)$ y $d(P, AB) = d(P, BC)$, siendo $P(x, y)$ un punto genérico de las bisectrices buscadas.

$$\text{Recta } AB \equiv 3x + y - 16 = 0 \quad \text{Recta } BC \equiv 4x - 5y + 23 = 0 \quad \text{Recta } AC \equiv 2x + 7y - 17 = 0$$

$$\text{Bisectriz interior al triángulo por el vértice } A: (3\sqrt{53} + 2\sqrt{10})x + (\sqrt{53} + 7\sqrt{10})y = 17\sqrt{10} + 16\sqrt{53}$$

$$\text{Bisectriz interior al triángulo por el vértice } B: (3\sqrt{41} + 4\sqrt{10})x + (\sqrt{41} - 5\sqrt{10})y = 16\sqrt{41} - 23\sqrt{10}$$

Al resolver el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene el incentro $I(2,06; 3,82)$

El radio de la circunferencia inscrita se puede calcular como la distancia del incentro a cualquiera de las tres rectas que incluyen a los lados, por ejemplo: $R = d(I, AB) = 1,9$.

EJERCICIOS

Ecuaciones de la recta

5.25. Para cada una de las siguientes rectas, indica si los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(3, -1)$ pertenecen o no a ellas y calcula un punto más de cada una:

$$\text{a) } r_1 \equiv (x, y) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \quad \text{b) } r_2 \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{c) } r_3 \equiv 2x + 5y = 1$$

a) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$(-2, 1) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \Rightarrow (-9, 3) = \lambda(4, -1) \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = -9 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{4} \\ -\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow P \notin r_1$$

$$(3, -1) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \Rightarrow (-4, 1) = \lambda(4, -1) \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -1 \\ -\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \in r_1$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ . Por ejemplo, si $\lambda = 0$, se obtiene el punto $(7, -2)$.

b) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en las ecuaciones, se tiene:

$$\begin{cases} -2 = -2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0 \\ 1 = 1 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow P \in r_2 \quad \begin{cases} 3 = -2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 5 \\ -1 = 1 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \notin r_2$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ . Por ejemplo, si $\lambda = 0$, se obtiene el punto $(-2, 1)$.

c) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$2(-2) + 5 \cdot 1 = -4 + 5 = 1 \Rightarrow P \in r_3 \quad 2 \cdot 3 + 5(-1) = 6 - 5 = 1 \Rightarrow Q \in r_3$$

Un punto más de la recta es, por ejemplo, $(\frac{1}{2}, 0)$.

5.26. Calcula la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:

a) La recta que pasa por el punto $P(-3, 1)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-1, -2)$.

b) La recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(1, 4)$.

c) La recta que tiene como uno de sus vectores de dirección el $\vec{u} = (-3, 3)$ y corta a la parte positiva del eje de abscisas en un punto que dista 3 unidades del origen de coordenadas.

d) La recta que tiene como vector director el $\vec{u} = (2, -5)$ y corta a la parte negativa del eje de abscisas en un punto que dista 2 unidades del origen de coordenadas.

e) La recta que tiene por dirección la del vector $\vec{u} = (3, 7)$ y corta al eje de ordenadas en un punto que dista 2 unidades negativas del origen de coordenadas.

$$\text{a) Ecuación vectorial: } r \equiv (x, y) = (-3, 1) + \lambda(-1, -2). \text{ Ecuaciones paramétricas: } r \equiv \begin{cases} x = -3 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

b) Vector de dirección: $\vec{AB} = (-1, 7)$

$$\text{Ecuación vectorial: } r \equiv (x, y) = (2, -3) + \lambda(-1, 7). \text{ Ecuaciones paramétricas: } r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -3 + 7\lambda \end{cases}$$

$$\text{c) Ecuación vectorial: } r \equiv (x, y) = (3, 0) + \lambda(-3, 3). \text{ Ecuaciones paramétricas: } r \equiv \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{d) Ecuación vectorial: } r \equiv (x, y) = (-2, 0) + \lambda(2, -5). \text{ Ecuaciones paramétricas: } r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = -5\lambda \end{cases}$$

$$\text{e) Ecuación vectorial: } r \equiv (x, y) = (0, -2) + \lambda(3, 7). \text{ Ecuaciones paramétricas: } r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2 + 7\lambda \end{cases}$$

5.27. Calcula la ecuación continua y la ecuación general de cada una de las siguientes rectas:

- a) Pasa por el punto $A(-3, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, -2)$.
- b) Pasa por los puntos $P(2, -5)$ y $Q(5, 1)$.
- c) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto $B(-3, 4)$.
- d) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, -3)$ y $N(5, 2)$.

a) Ecuación continua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+4}{-2}$ Ecuación general: $-2x - 6 = y + 4 \Rightarrow 2x + y + 10 = 0$

b) Ecuación continua: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y+5}{1+5}$ Ecuación general: $6x - 12 = 3y + 15 \Rightarrow 2x - y - 9 = 0$

c) Ecuación continua: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{4}$ Ecuación general: $4x + 3y = 0$

d) Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$ Ecuación general: $-\frac{1}{2}x = 3y \Rightarrow x + 6y = 0$

5.28. Calcula un vector de dirección y otro normal a cada una de las siguientes rectas:

- a) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.
 - b) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento \overline{AB} con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.
 - c) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.
- a) Vector de dirección: $\overline{AB} = (-5 - 2, -1 + 5) = (-7, 4)$; vector normal: $(4, 7)$
- b) El punto medio es $M\left(\frac{2-2}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = (0, 1)$. Por tanto, un vector de dirección es $(0, 1)$, y uno normal, $(-1, 0)$.
- c) Un vector normal a la mediatriz es $\overline{PQ} = (5 - 3, 2 - 5) = (2, -3)$. Un vector director es $(3, 2)$.

5.29. Calcula un vector director y otro normal a cada una de las siguientes rectas:

- a) $r \equiv -2x + 3y = 5$ b) $s \equiv x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$
- a) Vector normal $\vec{n} = (-2, 3)$; vector director $\vec{v} = (3, 2)$ b) Vector normal $\vec{n} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$; vector director $\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

5.30. Calcula las ecuaciones de los lados del triángulo de vértices $P(1, 3)$, $Q(-4, 0)$ y $R(-2, -1)$. Para cada lado, halla un vector de dirección y otro normal.

Lado PQ : Un vector de dirección es $\overline{QP} = (5, 3)$. Un vector normal es $(3, -5)$.
 La ecuación es: $PQ \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x - 3 = 5y - 15 \Rightarrow PQ \equiv 3x - 5y + 12 = 0$

Lado PR : Un vector de dirección es $\overline{RP} = (3, 4)$. Un vector normal es $(4, -3)$.
 La ecuación es: $PR \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow 4x - 4 = 3y - 9 \Rightarrow PR \equiv 4x - 3y + 5 = 0$

Lado QR : Un vector de dirección es $\overline{QR} = (2, -1)$. Un vector normal es $(1, 2)$.
 La ecuación es: $QR \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow -x - 4 = 2y \Rightarrow QR \equiv x + 2y + 4 = 0$

5.31. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

- a) $r \equiv y = -2x + 3$ c) $t \equiv \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$
 - b) $s \equiv 4x + 3y - 6 = 0$ d) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.
- a) La recta pasa por el punto $P(0, 3)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (2, 1)$, un vector director es $\vec{u} = (1, -2)$.
 Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$
- b) La recta pasa por el punto $P(0, 2)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (4, 3)$, un vector director es $\vec{u} = (-3, 4)$.
 Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por el punto $P(2, 0)$. Como un vector normal es $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \parallel (2, 3)$, un vector director es $\vec{u} = (-3, 2)$. Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta es $y = 1 - 2x$. Pasa por el punto $(0, 0)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (2, 1)$, un vector director es $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

5.32. Halla la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (-1, 3)$ como vector normal y pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación normal es $-1(x - 0) + 3(y + 0) = 0$. La ecuación general es $-x + 3y = 0$.

5.33. Halla la ecuación normal canónica y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (2, 4)$ como vector normal y pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} siendo $A(0, -2)$ y $B(-3, 0)$.

El punto medio del segmento \overline{AB} es $M\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{-2+0}{2}\right)$. La ecuación normal es $2\left(x + \frac{3}{2}\right) + 4(y + 1) = 0$.

La ecuación general es: $2x + 3 + 4y + 4 = 0 \Rightarrow 2x + 4y + 7 = 0$

La ecuación normal canónica es: $\frac{2}{\sqrt{20}}x + \frac{4}{\sqrt{20}}y + \frac{7}{\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{7}{\sqrt{20}} = 0$

5.34. Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $r: y = -2x + 3$

b) $r: 2x - 3y + 5 = 0$

c) $r: -\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0$

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$. h) $r: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u} = (-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, -7)$.

a) La recta está en forma explícita, luego $m = -2$.

b) $2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{2}x + 25 \Rightarrow m = \frac{15}{2}$

d) La dirección es la del vector $\overrightarrow{PQ} = (2, 1) \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

e) $m = \frac{3a - a}{1 - 1} = \frac{2a}{0}$. Es una recta vertical (si $a = 0$ no es una recta, al ser P y Q el mismo punto).

f) $m = -\frac{5}{3}$

g) Su dirección es la del vector $\vec{u} = (7, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{7}$

h) Su dirección es la del vector $\vec{u} = (5, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{5}$

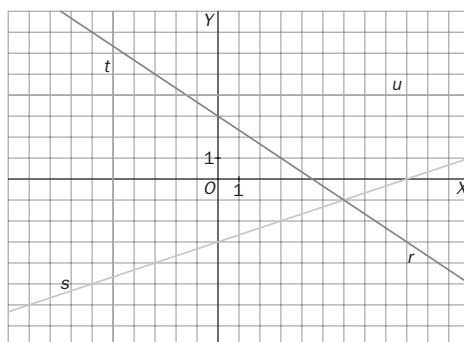
5.35. Indica el valor de las pendientes y de las ordenadas en el origen de las rectas de la figura y calcula, para cada una de ellas, su ecuación general.

$r: m = -\frac{2}{3}, n = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3 \Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0$

$s: m = \frac{1}{3}, n = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 3 \Rightarrow x - 3y - 9 = 0$

t : Recta vertical, no corta al eje $OY \Rightarrow x = -5$

$u: m = 0, n = 4 \Rightarrow y = 4$



5.36. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, -5)$ y forma con la parte positiva del eje de ordenadas un ángulo de 60° .

La recta forma un ángulo de 30° con el eje de abscisas, por lo que tiene pendiente $m = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Su ecuación explícita es $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$. Como pasa por P , se tiene que $-5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-2) + n \Rightarrow n = \frac{-15 + 2\sqrt{3}}{3}$.

La ecuación de la recta es, por tanto, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{-15 + 2\sqrt{3}}{3}$.

5.37. Calcula las ecuaciones explícitas de las rectas siguientes:

a) Pasa por $A(-1, 2)$ y tiene pendiente $m = 2$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 4)$.

c) Pasa por $A(2, -3)$ y forma con la parte derecha del eje de abscisas un ángulo de 30° .

d) Pasa por $A(-2, 5)$ y forma con la parte izquierda del eje de abscisas un ángulo de 120° .

a) La ecuación de la recta es $y = 2x + n$. Como pasa por A , ha de ser $2 = -2 + n \Rightarrow n = 4$.

La ecuación es $y = 2x + 4$.

b) La pendiente es $m = \frac{4 - 3}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$. Por tanto, la ecuación es $y = \frac{1}{3}x + n$. Como pasa por A , ha de

ser $3 = -\frac{1}{3} + n \Rightarrow n = \frac{10}{3}$. La ecuación de la recta es $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

c) La pendiente es $m = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La ecuación explícita es $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$. Como pasa por A , se tiene que

$-3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = \frac{-9 + 2\sqrt{3}}{3}$. La ecuación de la recta es, por tanto, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{-9 + 2\sqrt{3}}{3}$.

d) La recta forma un ángulo de 60° con la parte derecha del eje de abscisas, por lo que tiene pendiente

$m = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$. La ecuación explícita es $y = \sqrt{3}x + n$. Como pasa por A , se tiene que $5 = -2\sqrt{3} + n \Rightarrow n = 5 + 2\sqrt{3}$. La ecuación es, por tanto, $y = \sqrt{3}x + 5 + 2\sqrt{3}$.

5.38*. Calcula la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta r en los siguientes casos:

a) Pasa por el punto $P(-3, 6)$ y es paralela a la recta de ecuación $-2x + 3y - 5 = 0$.

b) Corta a los ejes coordenados en los puntos $P(0, -3)$ y $Q(-1, 0)$.

a) La dirección de la recta es la del vector $\vec{u} = (3, 2)$ y pasa por el punto P . Por tanto:

Ecuación vectorial: $r \equiv (x, y) = (-3, 6) + \lambda(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x + 3}{3} = \frac{y - 6}{2} \Rightarrow 2x + 6 = 3y - 18 \Rightarrow 2x - 3y + 24 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{2}{3}x + 8$

b) La dirección es la del vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 3)$.

Ecuación vectorial: $r \equiv (x, y) = (0, -3) + \lambda(-1, 3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x}{-1} = \frac{y + 3}{3} \Rightarrow 3x + y + 3 = 0$

Ecuación explícita: $y = -3x + 3$

Posiciones relativas de rectas

5.39. Indica la pendiente de todas las rectas paralelas a la recta que pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-1, -7)$.

La dirección de la recta es la del vector $\vec{u} = (-1 - 1, -7 - 2)$, luego $m = \frac{-7 - 2}{-1 - 1} = \frac{9}{2}$.

5.40. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 6)$ y es paralela a $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

La ecuación tiene el mismo vector de dirección que la recta dada y pasa por P , luego:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 6 - t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x + 2 = 2y - 12 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

5.41. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + \frac{t}{2} \\ y = 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$ d) $r: x + y = 7$ $s: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

b) $r: 3x - 2y = 7;$ $s: 2x - 3y = 8$ e) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$ $s: 4x + y - 8 = 0$

c) $r: 2x - y - 5 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 5 = 0$ f) $r: y = -2x + 3$ $s: y = \frac{x}{2}$

a) Los vectores de dirección de las rectas son $\vec{u}_r = (1, -1) \parallel \vec{u}_s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Como el punto $P(3, 1)$ de s no pertenece a r , ya que $\begin{cases} 3 = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2 \\ 1 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$, las rectas son paralelas.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes. Se cortan en $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ -6x + 9y = -24 \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow P(1, -2)$.

c) s , se puede escribir como: $-2x + y - 15 = 0$ y al ser $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-5}{-15} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

d) s , se escribe como $x + y - 7 = 0$, que es la misma expresión de r , por lo que las rectas son coincidentes.

e) $4(1 + \lambda) - 2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$. Las rectas son secantes en $\begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = -2 - 6 = -8 \end{cases} \Rightarrow P(4, -8)$.

f) Las rectas son secantes. Se cortan en el punto $\frac{x}{2} = -2x + 3 \Rightarrow x = -4x + 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}, y = \frac{3}{5} \Rightarrow P\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

5.42. Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes:

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases}$ c) $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $s: -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0$

b) $r: 2x - 5y = -\frac{23}{2}$ $s: 3x - 4y = -12$ d) $s: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}$ $s: 2x - y - 6 = 0$

Para calcular el punto de intersección basta resolver los sistemas de ecuaciones dados por las rectas.

a) $r = \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - 4\mu \\ 1 + \lambda = 2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ 3\lambda - 6\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ 3\lambda - 6\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(5, 0)$.

b) $\begin{cases} r \equiv 2x - 5y = -\frac{23}{2} \\ s \equiv 3x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 15y = -\frac{69}{2} \\ -6x + 8y = 24 \end{cases} \Rightarrow -7y = -\frac{21}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}, x = -2 \Rightarrow P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} r \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ s \equiv \frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 2 \\ -x + \frac{16y}{3} = -12 \end{cases} \Rightarrow 6y = -10 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}, x = \frac{28}{9} \Rightarrow P\left(\frac{28}{9}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv 2x - y - 6 = 0 \Rightarrow 2(2 - 3\lambda) + 2 - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P(2, -2)$

Rectas paralelas y perpendiculares

5.43. Calcula la ecuación de las siguientes rectas:

- a) Paralela a $2x + 5y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.
 b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.
 c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.
 d) Paralela a $r: 2x - y + 12 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
 e) Paralela a $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.
 f) Paralela a $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.
 g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.
- a) La recta es de la forma $2x + 5y + k = 0$. Como pasa por A , ha de ser $-4 + 30 + k = 0 \Rightarrow k = -26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x + 5y - 26 = 0$.
 b) La recta es $y = 4$.
 c) La recta es $x = -1$.
 d) La recta es de la forma $2x - y + k = 0$. Como pasa por $(0, 0)$, $k = 0$. Luego la ecuación es $2x - y = 0$.
 e) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x + 2}{-2} = \frac{y - 4}{1} \Rightarrow x + 2 = 2y - 8 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$$

 f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$
 g) La pendiente de la recta es $m = 1$, y la ordenada en el origen, $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

5.44. Calcula la ecuación de las siguientes rectas:

- a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.
 b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.
 c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.
 d) Perpendicular a $r: 3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
 e) Perpendicular a $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.
 f) Perpendicular al segmento \overline{AB} con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.
- a) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, -2)$ y pasa por A , luego

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{-2} \Rightarrow -2x + 4 = y + 1 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

 b) El vector de dirección es $\vec{u} = (0, 1)$ y pasa por A , luego $\begin{cases} x = -4 \\ y = 8 + t \end{cases} \Rightarrow x = -4$
 c) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, 0)$ y pasa por A , luego $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3$
 d) El vector de dirección es $\vec{u} = (3, -3)$ y pasa por $(0, 0)$, luego

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{3} = \frac{y}{-3} \Rightarrow -3x - 3y = 0 \Rightarrow 3x + 3y = 0$$

 e) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, -2)$ y pasa por P , luego

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x + 2}{1} = \frac{y}{-2} \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$$

 f) $\overline{AB} = (3, -2)$; por tanto, el vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (2, 3)$ y pasa por P ,
 luego $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 2}{3} \Rightarrow 3x + 9 = 2y - 4 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

5.45. En cada caso, calcula el valor del parámetro k para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

b) Ha de verificarse que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

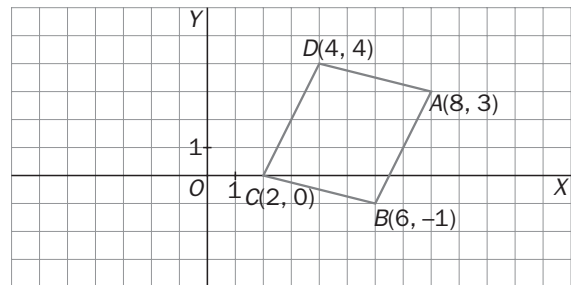
c) Ha de verificarse que $\frac{2k}{3} = \frac{-5}{k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

5.46. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Calcula las ecuaciones de las diagonales de la figura, y comprueba si es o no un rombo.

No se trata de un rombo, ya que sus diagonales no son perpendiculares. En efecto:

$\overrightarrow{DE} = (2, -5)$, $\overrightarrow{AC} = (-6, -3)$ y resulta:

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = -12 + 15 = 3 \neq 0$, por lo que no son perpendiculares y la figura no es un rombo.



5.47. Halla para qué valor de b , la recta $x - by = -4b - 1$ es coincidente con la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(2, 3)$.

La recta dada habrá de pasar por P y Q . Luego $\begin{cases} -1 - 4b = -4b - 1 \\ 2 - 3b = -4b - 1 \end{cases} \Rightarrow 2 - 3b = -4b - 1 \Rightarrow b = -3$
La recta es $x + 3y - 11 = 0$.

5.48. Halla el valor de k para que sean paralelas las rectas

$r: (2k - 2)x - y + 2k = 0$

$s: (k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0$

Para que sean paralelas tiene que suceder que: $\frac{2k - 2}{k - 1} = \frac{-1}{k + 1} \Rightarrow 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1$ $k = -\frac{3}{2}$

5.49. Dadas las rectas $r: (k - 1)x - 2y + 2k = 0$ y $s: (3k - 4)x + y + k^2 = 0$, encuentra los valores de k para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u}_r = (2, k - 1)$ y $\vec{u}_s = (1, 4 - 3k)$, que han de ser perpendiculares.

Así: $2 + (k - 1)(4 - 3k) = 0 \Rightarrow 3k^2 + 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-7 \pm 5}{-6} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ k = 2 \end{cases}$

Para $k = \frac{1}{3}$, $\Rightarrow \begin{cases} r: \frac{-2}{3}x - 2y + \frac{2}{3} = 0 \\ s: -3x + y + \frac{1}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 27x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{15}, y = \frac{13}{45}$

El punto de intersección es $P\left(\frac{2}{15}, \frac{13}{45}\right)$

Para $k = 2$, $\begin{cases} r: x - 2y + 4 = 0 \\ s: 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-12}{5}, y = \frac{4}{5} \Rightarrow P\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Haz de rectas

5.50. Calcula la ecuación del haz de rectas secantes de vértice el punto $P(-2, 3)$. Calcula la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

La ecuación del haz es $y - 3 = m(x + 2)$.

Si $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$

- 5.51. Calcula la ecuación del haz determinado por las rectas secantes $r: y = 2x - 3$ y $s: y = 3x - 5$ y halla la recta de este haz que pasa por el punto $P(-2, 2)$.

La ecuación del haz es: $2x - y - 3 + \lambda(3x - y - 5) = 0$

Si la recta pasa por P , se tiene que $-4 - 2 - 3 + \lambda(-6 - 2 - 5) = 0$. Luego: $\lambda = -\frac{9}{13}$. Por tanto, la recta buscada es: $2x - y - 3 - \frac{9}{13}(3x - y - 5) = 0 \Rightarrow 26x - 13y - 39 - 27x + 9y + 45 = 0 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$

- 5.52. Calcula la ecuación del haz determinado por las rectas secantes $r: 2x + y = 0$ y $s: 3x - 2y = 0$ y halla la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

La ecuación del haz es: $2x + y + \lambda(3x - 2y) = 0$

En primer lugar se calcula la pendiente en función de λ :

$$2x + y + \lambda(3x - 2y) = 0 \Rightarrow (2 + 3\lambda)x + (1 - 2\lambda)y = 0 \Rightarrow m = \frac{2 + 3\lambda}{2\lambda - 1}$$

$$\text{Si } m = \frac{2 + 3\lambda}{2\lambda - 1} = -\frac{2}{3} \Rightarrow 6 + 9\lambda = -4\lambda + 2 \Rightarrow 13\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{13}$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$2x + y - \frac{4}{13}(3x - 2y) = 0 \Rightarrow 26x + 13y - 12x + 8y = 0 \Rightarrow 14x + 21y = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0$$

- 5.53. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas paralelas a $r: -2x + 3y - 5 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por $P(-1, 3)$.

Todas las rectas paralelas a la dada son de la forma $-2x + 3y + k = 0$.

La recta buscada pasa por P , luego $2 + 9 + k = 0 \Rightarrow k = -11$.

La ecuación de la recta es $-2x + 3y - 11 = 0$.

- 5.54. Encuentra la expresión que representa a todas las rectas que tienen pendiente $m = -2$ y di cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas.

Las rectas con pendiente $m = -2$ son de la forma $y = -2x + n$.

Si pasa por el origen, su ordenada en el origen es $n = 0$; por tanto, la recta pedida es $y = -2x$.

- 5.55. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas perpendiculares a $r: 3x - 2y + 12 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por $P(1, -1)$.

La ecuación explícita de la recta r es $y = \frac{3}{2}x + 6$ y su pendiente es $m = \frac{3}{2}$. Las rectas perpendiculares tienen pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Por tanto, el haz pedido es $y = -\frac{2}{3}x + n$.

La recta del haz que pasa por $P(1, -1)$ cumple $-1 = -\frac{2}{3} + n \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$. Su ecuación es $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

- 5.56. Halla la ecuación del haz determinado por las rectas secantes $r: 2x - y = 10$ y $s: x - 3y = 0$ e indica la ecuación normal de la recta del haz que es perpendicular a la recta $t: 5x - 2y + 3 = 0$.

La ecuación del haz es $2x - y - 10 + \lambda(x - 3y) = 0 \Rightarrow (2 + \lambda)x - (1 + 3\lambda)y - 10 = 0$.

La ecuación de la recta perpendicular a $5x - 2y + 3 = 0$ ha de ser de la forma $2x + 5y + k = 0$.

Para que esta recta sea del haz se ha de cumplir: $\frac{2 + \lambda}{2} = \frac{-1 - 3\lambda}{5} = \frac{-10}{k} \Rightarrow \lambda = -\frac{12}{11}, k = -22$

La ecuación normal pedida es, por tanto:

$$\text{Normalizando: } \frac{2x + 5y - 22}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{5}{\sqrt{29}}y - \frac{22}{\sqrt{29}} = 0$$

Distancias y ángulos

5.57. Calcula la distancia entre los puntos A y B :

a) $A(2, -3)$ y $B(-2, 5)$

c) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ y $B\left(\frac{3}{5}, -3\right)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

b) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1609}{900}} = \frac{\sqrt{1609}}{30}$

d) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

5.58. Halla la distancia del punto $A(2, -3)$ al punto de intersección de las rectas $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$, $s: 2x + y - 3 = 0$

El punto de intersección es $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 + y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1, 1) \Rightarrow d(A, P) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} u$

5.59. Calcula la distancia del punto P a la recta r en los siguientes casos:

a) $P(-3, 4)$ $r: 2x + 3y - 5 = 0$

b) $P(0, -2)$ $r: y = -2x + 5$

c) $P\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ $r: 2x - 2y = -3$

d) $P(1, -2)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

e) $P(-1, 0)$ y r es la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y $B\left(-2, \frac{2}{4}\right)$.

f) $P(3, -2)$ y r es la recta que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas y que tiene ordenada en el origen igual a -2 .

a) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-6 + 12 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13} u$

b) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} u$

c) $d(P, r) = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot (-3) + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 + 6 + 3|}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$

d) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} \Rightarrow x+1 = y+2 \Rightarrow x+y+1=0; d(P, r) = \frac{|1-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 0 u$

e) En primer lugar se halla la ecuación de la recta:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2}} = \frac{y + 3}{\frac{1}{2} + 3} \Rightarrow 14x + 10y + 23 = 0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{9}{\sqrt{296}} = \frac{9\sqrt{296}}{296} u$$

f) La pendiente de la recta es $m = 1$, y la ordenada en el origen es $n = -2$.

Por tanto, la ecuación es $y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0; d(P, r) = \frac{|3 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} u$

5.60. Comprueba que los siguientes pares de rectas son paralelas y calcula, en cada caso, la distancia que las separa:

a) $r: 2x - y = 7;$ $s: 2x - y = 8$
 b) $r: 2x - 3y - 2 = 0;$ $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$

c) $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3-t}{2} \end{cases}$

a) $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-8} \Rightarrow$ Son paralelas; $d(r, s) = \frac{|-7+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} u$

b) En primer lugar se reescribe la ecuación de $s \equiv -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow s \equiv 2x - 3y + 6 = 0$.

$\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow$ Son paralelas; $d(r, s) = \frac{|-2-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13} u$

c) En primer lugar se reescriben las ecuaciones generales de ambas rectas:

$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow -x+2 = 2y-6 \Rightarrow x+2y-8=0$

$s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - \frac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow x-3 = \frac{2y-3}{-1} \Rightarrow -x+3 = 2y-3 \Rightarrow x+2y-6=0$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} \neq \frac{-8}{-6} \Rightarrow$ Son paralelas; $d(r, s) = \frac{|-8+6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} u$

5.61. Calculando las medidas de sus tres lados y clasifica los siguientes triángulos cuyos vértices son:

a) $A(3, 2), B(5, -4)$ y $C(1, -2)$ b) $A(3, 5), B(-1, -1)$ y $C(5, -3)$ c) $A(0, 1), B(0, 2)$ y $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

a) $\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} u;$

$\overline{CB} = \sqrt{(5-1)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} u$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} u.$ Se trata de un triángulo isósceles.

b) $\overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} u;$

$\overline{CB} = \sqrt{(-1-5)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{26+4} = \sqrt{40} u.$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} u.$ Se trata de un triángulo escaleno.

c) $\overline{AB} = \sqrt{(0-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1} = 1 u;$

$\overline{CB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 u$

$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 u.$ Se trata de un triángulo equilátero.

5.62. Calcula el perímetro y el área del triángulo de vértices: $A(-2, 2), B(5, -1)$ y $C(3, 4)$.

En primer lugar se calcula la longitud de los lados:

$\overline{AB} = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58};$ $\overline{CB} = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} u$

$\overline{AC} = \sqrt{(3+2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}.$ Por tanto, el perímetro es: $P = 58 + 229 u.$

La altura del triángulo es la distancia del vértice C a la recta determinada por el segmento \overline{AB} .

$\overline{AB} = \frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow -3(x+2) = 7(y-2) \Rightarrow -3x-7y+8=0.$

$d(C, r) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) + 8|}{\sqrt{3^2+7^2}} = \frac{29}{\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$

Por tanto, el área es: $A = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot d(C, r) = \frac{1}{2} \sqrt{58} \frac{\sqrt{58}}{2} = \frac{58}{4} = \frac{29}{2} u^2$

5.63. Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

$$r: x - 3y + 1 = 0$$

$$s: 3x - 2y - 4 = 0$$

$$t: 2x + y + 2 = 0$$

En primer lugar se calculan los vértices, que son los puntos de corte de las rectas.

$$\begin{cases} r \equiv x - 3y + 1 = 0 \\ s \equiv 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 9y - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y - 7 = 0 \Rightarrow y = 1 \quad x = 2 \Rightarrow A(2 \quad 1)$$

$$\begin{cases} r \equiv x - 3y + 1 = 0 \\ t \equiv 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y - 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad x = -1 \Rightarrow B(-1 \quad 0)$$

$$\begin{cases} s \equiv 3x - 2y - 4 = 0 \\ t \equiv 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 8 = 0 \\ -6x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow -7y - 14 = 0 \Rightarrow -7y - 14 = 0 \Rightarrow y = -2 \quad x = 0 \Rightarrow C(0 \quad -2)$$

A continuación se calculan las longitudes de los lados:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\overline{CB} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\text{El perímetro es: } P = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13} \text{ u.}$$

5.64. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x + y = 1;$

$s: x - y = 3$

c) $r: y = -x + 2;$

$s: y = -\frac{1}{2} - 3x$

b) $r: x - 2y - 2 = 0;$

$s: -x - y - 2 = 0$

d) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

$$\text{a) } \cos(\widehat{r, s}) = \cos \alpha = \frac{|3 - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{b) } \cos(\widehat{r, s}) = \cos \alpha = \frac{\left| -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\text{c) } \cos(\widehat{r, s}) = \cos \alpha = \frac{|3 + 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 45^\circ 33' 54''$$

$$\text{d) } \cos(\widehat{r, s}) = \cos \alpha = \frac{|-4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{40}} = 0,949 \Rightarrow \alpha = 18^\circ 26'$$

5.65. Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero que forman las rectas $r: 3x + 4y = 12$ y $s: 5x + 6y = 30$ con los ejes coordenados.

Los vértices del cuadrilátero son $A(4, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 5)$ y $D(0, 3)$

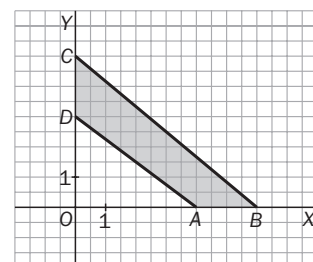
Para calcular el perímetro, se halla el módulo de los vectores que forman los lados, $\overline{AB} = (2, 0)$, $\overline{BC} = (-6, 5)$, $\overline{CD} = (0, -2)$ y $\overline{DA} = (4, -3)$:

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 2, |\overline{BC}| = \sqrt{61}, |\overline{DA}| = 5$$

$$\text{Perímetro: } 9 + \sqrt{61} \text{ u}$$

El área se calcula restando las áreas de los triángulos OBC y OAD .

$$\text{Área: } 15 - 6 = 9 \text{ u}^2$$



5.66. Calculando las medidas de sus tres ángulos, clasifica los siguientes triángulos cuyos vértices son:

- a) $A(5, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(7, 0)$ b) $A(1, 2)$, $B(-4, -3)$ y $C(2, -1)$ c) $A(-2, 8)$, $B(-6, 1)$ y $C(0, 4)$

$$a) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -3) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-8 + 3}{\sqrt{4^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{-5}{\sqrt{17} \sqrt{13}} = -0,336 \Rightarrow \hat{A} = 109^\circ 40' \Rightarrow \text{Es obtusángulo}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (6, -2) \\ \overrightarrow{BA} = (4, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{12 + 6}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{22}{\sqrt{40} \sqrt{17}} = 0,844 \Rightarrow \hat{B} = 32^\circ 28'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2, 3) \\ \overrightarrow{CB} = (-6, 2) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{24 - 2}{\sqrt{6^2 + 2^2} \sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{18}{\sqrt{13} \sqrt{40}} = 0,789 \Rightarrow \hat{C} = 37^\circ 52'$$

$$b) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-5, -5) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -3) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-5 + 15}{\sqrt{5^2 + 5^2} \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{50} \sqrt{10}} = 0,447 \Rightarrow \hat{A} = 63^\circ 26'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (5, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (6, 2) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{30 + 10}{\sqrt{5^2 + 5^2} \sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{40}{\sqrt{50} \sqrt{40}} = 0,894 \Rightarrow \hat{B} = 26^\circ 34'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-1, 3) \\ \overrightarrow{CB} = (-6, -2) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{6 - 6}{\sqrt{1^2 + 3^2} \sqrt{6^2 + 2^2}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{Es rectángulo}$$

$$c) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4, -7) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -4) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-8 + 28}{\sqrt{4^2 + 7^2} \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{20}{\sqrt{65} \sqrt{20}} \Rightarrow \hat{A} = 56^\circ 19'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (4, 7) \\ \overrightarrow{BC} = (6, 3) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{24 + 21}{\sqrt{4^2 + 7^2} \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{45}{\sqrt{65} \sqrt{45}} = 0,832 \Rightarrow \hat{B} = 33^\circ 41'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2, 4) \\ \overrightarrow{CB} = (-6, -3) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{12 - 12}{\sqrt{2^2 + 4^2} \sqrt{6^2 + 3^2}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{Es rectángulo}$$

5.67. Calcula las coordenadas de los vértices y la medida de los ángulos del triángulo determinado por las rectas:

r: $3x + 2y - 3 = 0$, s: $2x - y - 2 = 0$, t: $x + 2y + 9 = 0$.

Clasifícalo según sus lados y según sus ángulos.

En primer lugar se calculan los vértices, que son los puntos de corte de las rectas.

$$\begin{cases} r \equiv 3x + 2y - 3 = 0 \\ s \equiv 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 4x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7x - 7 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$\begin{cases} r \equiv 3x + 2y - 3 = 0 \\ t \equiv x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \quad y = -\frac{15}{2} \Rightarrow B\left(6, -\frac{15}{2}\right)$$

$$\begin{cases} s \equiv 2x - y - 2 = 0 \\ t \equiv x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s \equiv 2x - y - 2 = 0 \\ t \equiv -2x - 4y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow -5y - 20 = 0 \Rightarrow y = -4 \quad x = -1 \Rightarrow C(-1, -4)$$

A continuación se calculan los ángulos del triángulo.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(5, -\frac{15}{2}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -4) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-10 + 30}{\sqrt{5^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} \sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,496 \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ 15'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(5, -\frac{15}{2}\right) \\ \overrightarrow{BC} = \left(-7, \frac{7}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{35 + 26,25}{\sqrt{5^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} \sqrt{7^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2}} = \frac{45}{\sqrt{65} \sqrt{45}} = 0,868 \Rightarrow \hat{B} = 29^\circ 45'$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (2, 4) \\ \overrightarrow{CB} = \left(7, -\frac{7}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{14 - 14}{\sqrt{2^2 + 2^2} \sqrt{7^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

Se trata de un triángulo rectángulo y escaleno.

Puntos y rectas simétricos

- 5.68. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del \overline{AB} respecto de la simetría central de centro P siendo: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$ y $P(3, 5)$.

Sea $\overline{A'B'}$ el segmento simétrico de \overline{AB} .

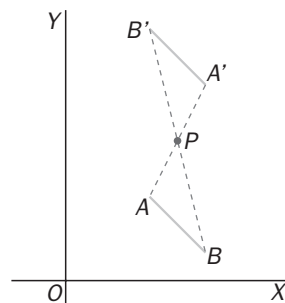
Por tratarse de una simetría central de centro P :

P ha de ser el punto medio de A y A' , luego:

$$\begin{cases} A(2, 3) \\ P(3, 5) \\ A'(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+a}{2} = 3 \Rightarrow a = 4 \\ \frac{3+b}{2} = 5 \Rightarrow b = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(4, 7)$$

P ha de ser el punto medio de B y B' , luego:

$$\begin{cases} B(4, 1) \\ P(3, 5) \\ B'(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4+a}{2} = 3 \Rightarrow a = 2 \\ \frac{1+b}{2} = 5 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(2, 9)$$



- 5.69. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del \overline{AB} respecto de la simetría axial de eje r siendo: $A(1, 3)$, $B(3, \frac{5}{2})$ y $r: x + y = 3$.

Sea $\overline{A'B'}$ el segmento simétrico de \overline{AB} . Por tratarse de una simetría axial, la recta que pasa por A y A' es perpendicular a r . Su ecuación general es:

$$AA' \equiv x - y + k = 0 \Rightarrow 1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

El punto de corte de dicha recta con r es:

$$M \equiv AA' \cap r \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

M es el punto medio de A y A' , luego:

$$A(1, 3), M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } A'(a, b) \Rightarrow \frac{1+a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0; \frac{3+b}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow A'(0, 2)$$

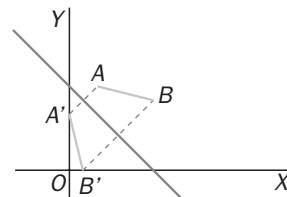
Siguiendo un proceso análogo para el punto B se tiene:

$$BB' \equiv x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0;$$

$$N \equiv BB' \cap r \Rightarrow \begin{cases} x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4}, y = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

N es el punto medio de B y B' , luego:

$$B\left(3, \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) \text{ y } B'(a, b) \Rightarrow \frac{3+a}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; \frac{\frac{5}{2}+b}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow B'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$



- 5.70. Dada las rectas $r: x - 4y + 2 = 0$ y $s: 2x - 3y = -4$:

a) Calcula su punto de corte.

b) Demuestra que el punto $P(1, 2)$ pertenece a s y calcula su simétrico respecto de la recta r .

c) Calcula la ecuación de la recta simétrica de s respecto de la recta r .

a) El punto de corte es: $\begin{cases} 2 - 4y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0)$

b) P verifica la ecuación de s . En efecto: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow P \in s$

La recta perpendicular a r que pasa por P es: $4x + y + k = 0 \Rightarrow 4 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow 4x + y - 6 = 0$

Dicha recta corta a r en el punto: $M \equiv \begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{22}{17}, \frac{14}{17}\right)$

M es el punto medio de P y su simétrico, luego:

$$P(1, 2), M\left(\frac{22}{17}, \frac{14}{17}\right) \text{ y } P'(a, b) \Rightarrow \frac{1+a}{2} = \frac{22}{17} \Rightarrow a = \frac{27}{17}; \frac{2+b}{2} = \frac{14}{17} \Rightarrow b = -\frac{6}{17} \Rightarrow P'\left(\frac{27}{17}, -\frac{6}{17}\right)$$

c) $s' \equiv P'Q \Rightarrow \frac{x+2}{61} = \frac{y}{-6} \Rightarrow -6x - 12 = 61y \Rightarrow 6x + 61y + 12 = 0$

Lugares geométricos

5.71. Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

- Calcula las mediatrices de los segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} .
- Calcula las coordenadas del punto que equidista de A , B y C .

En primer lugar se calculan las ecuaciones de las rectas correspondientes a los lados del triángulo:

$$\overline{AB} \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-4}{-4} \Rightarrow x-y+3=0$$

$$\overline{AC} \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-6} \Rightarrow -3x+3=y-4 \Rightarrow 3x+y-7=0$$

$$\overline{BC} \equiv \frac{x+3}{6} = \frac{y}{-2} \Rightarrow -x-3=3y \Rightarrow x+3y+3=0$$

a) La mediatriz es la perpendicular al lado que pasa por el punto medio, luego:

$$M_{\overline{AB}} \equiv x+y+k=0 \text{ pasa por el punto } (-1, 2) \Rightarrow -1+2+k=0 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow x+y-1=0$$

$$M_{\overline{AC}} \equiv x-3y+k=0 \text{ pasa por el punto } (2, 1) \Rightarrow 2-3+k=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow x-3y+1=0$$

$$M_{\overline{BC}} \equiv 3x+y+k=0 \text{ pasa por el punto } (0, -1) \Rightarrow 1+k=0 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow 3x-y-1=0$$

b) Se trata de calcular el circuncentro (punto donde se cortan las tres mediatrices): $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5.72. Halla las bisectrices de las rectas $r: 3x-2y=-2$ y $s: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases}$ y comprueba que son perpendiculares.

En primer lugar se obtiene la ecuación general de la recta s : $\begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2}=y-1 \Rightarrow x-2y+2=0$

La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas rectas. Por tanto:

$$\frac{3x-2y+2}{\sqrt{9+4}} = \pm \frac{x-2y+2}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x\sqrt{5}-2y\sqrt{5}+2\sqrt{5}=x\sqrt{13}-2y\sqrt{13}+2\sqrt{13} \Rightarrow b_1=(3\sqrt{5}-\sqrt{13})x+(2\sqrt{13}-2\sqrt{5})y+2\sqrt{5}-2\sqrt{13}=0 \\ 3x\sqrt{5}-2y\sqrt{5}+2\sqrt{5}=-x\sqrt{13}+2y\sqrt{13}-2\sqrt{13} \Rightarrow b_2=(3\sqrt{5}+\sqrt{13})x-(2\sqrt{13}+2\sqrt{5})y+2\sqrt{5}+2\sqrt{13}=0 \end{cases}$$

Son perpendiculares, ya que:

$$(3\sqrt{5}-\sqrt{13})(2\sqrt{13}-2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{5}+\sqrt{13})(-2\sqrt{13}-2\sqrt{5}) = (3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{13})^2 - [(2\sqrt{13})^2 - (2\sqrt{5})^2] = 45-1-52+20=0$$

PROBLEMAS

5.73. Dado el triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(0, -3)$:

- Calcula las coordenadas del baricentro.
- Calcula las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro.
- Calcula las ecuaciones de dos mediatrices y las coordenadas del circuncentro.
- Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Calcula la ecuación de la recta de Euler y comprueba que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados.

a) Baricentro: $G\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) Alturas: $h_{BC} \equiv x-5y+14=0$; $h_{AC} \equiv x+6y-11=0$; $h_{AB} \equiv 2x+y+3=0$. Ortocentro: $H\left(\frac{-29}{11}, \frac{25}{11}\right)$

c) Mediatrices: $M_{AB} \equiv 4x+2y-5=0$; $M_{BC} \equiv x-5y-2=0$; $M_{AC} \equiv 2x+12y-1=0$. Circuncentro: $C\left(\frac{29}{22}, -\frac{3}{22}\right)$

d) El radio de la circunferencia es: $d(C, A) = \sqrt{\left(\frac{29}{22}-1\right)^2 + \left(-\frac{3}{22}-3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{22}\right)^2 + \left(\frac{69}{22}\right)^2} = \sqrt{\frac{5490}{484}} = 3,37 \text{ u}$

e) La recta de Euler es $53x+87y-58=0$. Los tres puntos verifican la ecuación, luego están alineados.

5.74. Halla las bisectrices interiores del triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 0)$. Calcula las coordenadas del incentro y el radio de la circunferencia inscrita.

Bisectriz interior del ángulo \hat{A} : $2x - y - 1 = 0$

Bisectriz interior del ángulo \hat{B} : $(\sqrt{2} - 1)x + (2\sqrt{2} + 3)y - 3\sqrt{2} - 7 = 0$

Bisectriz interior del ángulo \hat{C} : $(3 + \sqrt{2})x + (1 + 2\sqrt{2})y - 9 - 3\sqrt{2} = 0$

Para calcular el incentro, basta calcular el punto de corte de dos bisectrices: Incentro: $I(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1)$

Para calcular el radio de la circunferencia inscrita, basta calcular la distancia del incentro a uno de los lados.

La ecuación de la recta sobre la que se encuentra el lado AB es $x - 3y + 7 = 0$.

$$R = d(I, AB) = \frac{|\sqrt{2} - 3(2\sqrt{2} - 1) + 7|}{\sqrt{10}} = \frac{|\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3 + 7|}{\sqrt{10}} = \frac{|-5\sqrt{2} + 10|}{\sqrt{10}} = \frac{-5\sqrt{2} + 10}{\sqrt{10}} = -\sqrt{5} + \sqrt{10} \text{ u.}$$

5.75. Dado el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(3, -4)$ y $C(3, 5)$, y los puntos exteriores $D(5, -3)$ y $E(5, 3)$:

- Demuestra que el segmento \overline{BD} es paralelo al lado \overline{AC} y mide la tercera parte de éste.
- Demuestra que el segmento \overline{CE} es paralelo al lado \overline{AB} y mide la tercera parte de éste.
- Si M es el punto medio de \overline{DE} y G es el baricentro del triángulo, demuestra que A , G y M están alineados.
- Comprueba que G es el punto medio de A y M .

a) $\overline{BD} = (2, 1)$, $\overline{AC} = (6, 3) \Rightarrow \overline{AC} = 3\overline{BD}$

b) $\overline{CE} = (2, -2)$, $\overline{AB} = (6, -6) \Rightarrow \overline{AB} = 3\overline{CE}$

c) d) $M\left(\frac{5+5}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = (5, 0)$, $G\left(\frac{-3+3+3}{3}, \frac{2-4+5}{3}\right) = (1, 1)$

$\overline{AM} = (8, -2)$ y $\overline{AG} = (4, -1)$, por tanto: $\overline{AM} = 2\overline{AG} \Rightarrow A, M$ y G están alineados y G es el punto medio del segmento de extremos A y M .

5.76. Dado el cuadrilátero de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(3, 3)$ y $D\left(1, \frac{5}{2}\right)$:

- Demuestra que se trata de un trapecio.
- Calcula el punto donde se cortan las diagonales.
- Comprueba que la recta que une los puntos medios de los dos lados no paralelos es paralela a las bases del trapecio.

a) Los lados AB y DC son paralelos, ya que los vectores $\overline{AB} = (4, 1)$ y $\overline{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ son proporcionales.

b) $\left. \begin{array}{l} DB \equiv x + 8y - 21 = 0 \\ AC \equiv x - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ punto de corte $P\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

c) $P\left(1, \frac{7}{4}\right)$ y $Q\left(4, \frac{5}{2}\right)$ son los puntos medios de AD y BC , respectivamente.

La recta PQ es paralela a los lados AB y DC , ya que los vectores $\overline{AB} = (4, 1)$, $\overline{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $\overline{QP} = \left(3, \frac{3}{4}\right)$ son proporcionales.

5.77. Se considera el cuadrilátero de vértices: $A(-5, 0)$, $B(3, 2)$, $C(5, -8)$ y $D(-7, -6)$.

- Calcula la medida de las dos diagonales.
- Comprueba que los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.
- Calcula el perímetro del paralelogramo.
- Comprueba que el perímetro hallado coincide con la suma de las dos diagonales del cuadrilátero inicial.

$$a) AC = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} \text{ u}$$

$$BD = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} \text{ u}$$

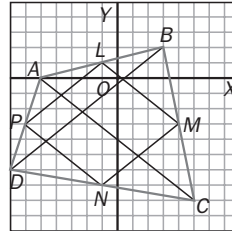
b) Los puntos medios de los lados son:

$$\text{Lado } AB: L\left(\frac{3-5}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (-1, 1)$$

$$\text{Lado } BC: M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2-8}{2}\right) = (4, -3)$$

$$\text{Lado } CD: N\left(\frac{5-7}{2}, \frac{-6-8}{2}\right) = (-1, -7)$$

$$\text{Lado } DA: P\left(\frac{-5-7}{2}, \frac{-6+0}{2}\right) = (-6, -3)$$



El punto medio de L y N es $(-1, -3)$, y el punto medio de P y M es $(-1, -3)$.

Al coincidir estos dos puntos medios, se deduce que $LMNP$ es paralelogramo.

$$c) LM = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \quad MN = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} \quad P = 2\sqrt{41} + 2\sqrt{41} = 4\sqrt{41}$$

$$d) P = 4\sqrt{41} = 2\sqrt{41} + 2\sqrt{41} = AC + BD$$

5.78. Halla el punto de la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ y que equidista de los puntos $A(2, 2)$ y $B(-2, 4)$.

El punto buscado será la intersección de la recta r con la mediatriz del segmento \overline{AB} .

$$\text{La mediatriz del segmento } \overline{AB} \text{ es: } \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow 2x = y-3 \Rightarrow y-3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0.$$

$$\text{El punto de intersección es: } \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 1)$$

5.79. Calcula los puntos de la recta $r: x + y - 3 = 0$ que están a distancia 1 del punto $P(1, 1)$.

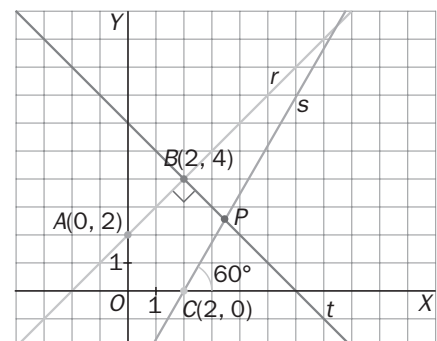
Los puntos de la recta son de la forma $(x, 3-x)$. Como están a distancia 1 de P , se tiene que:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2-x)^2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (2-x)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los puntos buscados son $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$.

5.80*. A partir de la información de la figura, calcula:

- Las ecuaciones de las rectas r , s y t .
- El punto P de intersección entre s y t .
- El punto P' simétrico de P respecto de la recta r .
- El ángulo que forman s y t .
- Las rectas que pasan por el punto $C(-1, 3)$ y forman un ángulo de 30° con la recta r .



$$a) r \equiv AB \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x - y + 2 = 0; \quad s \equiv y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3};$$

$$t \equiv \frac{x-6}{4} = \frac{y}{-4} \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

$$b) \begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 6 = 0 \Rightarrow (1 + \sqrt{3})x = 2\sqrt{3} + 6 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(2\sqrt{3} + 6)(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = 2\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$c) PP' = 2 PB; PB = (2 - 2\sqrt{3}, 4 - (6 - 2\sqrt{3})) = (2 - 2\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PP' = 2(2 - 2\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3}) = (4 - 4\sqrt{3}, -4 + 4\sqrt{3}).$$

$$\text{Sea } P'(a, b). \text{ Se tiene que } a - 2\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4 - 2\sqrt{3} \text{ y } b - 6 + 2\sqrt{3} = -4 + 4\sqrt{3} \Rightarrow b = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(4 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$$

$$d) \cos \alpha = \frac{(\sqrt{3}, -1) \cdot (1, 1)}{\sqrt{3+1}\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = 0,26 \Rightarrow \alpha = 75^\circ$$

e) La recta r tiene pendiente 1, luego forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas. Las rectas que forman un ángulo de 30° con la recta r tienen que formar, por tanto, ángulos de 15° o de 75° con el eje de abscisas. Por tanto, sus pendientes han de ser $\text{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o bien $\text{tg}(75^\circ) \cong 3,732$. Las rectas son:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, y = 3,732x + 6,732$$

5.81. Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas:

$$r: x + 3y = 14$$

$$s: 3x - 5y = -14$$

$$t: 2x - y = -7$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 3x - 5y = -14 \end{cases} \Rightarrow A(2, 4) \quad \begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-1, 5) \quad \begin{cases} 3x - 5y = -14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow C(-3, 1)$$

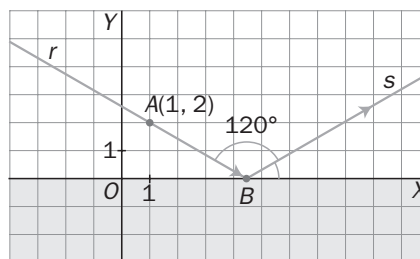
$$\text{La longitud de la base es: } d(A, B) = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \text{ u}$$

$$\text{La longitud de la altura es: } d(C, \overline{AB}) = \frac{|-3 + 3 - 14|}{\sqrt{10}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5} \text{ u}$$

$$\text{El área es: } S = \frac{\sqrt{10} \cdot \frac{14}{\sqrt{10}}}{2} = 7 \text{ u}^2$$

5.82*. Un rayo de luz r , que pasa por el punto $A(1, 2)$, incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando con él un ángulo de 30° .

Halla las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.



Rayo incidente: recta que pasa por $A(1, 2)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 150° :

$$\text{tg}(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n \Rightarrow \text{Como la recta pasa por } A: 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6 + \sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Por tanto, la recta es } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3}.$$

Rayo reflejado: en primer lugar se calcula el punto de corte del rayo con el eje OX:

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} + 1. \text{ El punto de corte del rayo incidente con el eje de abscisas es } B(2\sqrt{3} + 1, 0).$$

El rayo reflejado es la recta que pasa por B y forma un ángulo de 30° con el eje de abscisas. Por tanto:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n \text{ y pasa por } B: 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3} + 1) + n \Rightarrow n = -\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3} + 1) = -2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5.83. Calcula el valor de k para que el triángulo de vértices $A(4, 3)$, $B(6, -3)$ y $C(6, k)$ tenga por área 20 unidades cuadradas.

En primer lugar se calcula la longitud de la base:

$$AB = (6 - 4, -3 - 3) = (2, -6) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \text{ u}$$

A continuación se calcula la longitud de la altura:

La recta que pasa por A y por B tiene por ecuación: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x-12 = -y+3 \Rightarrow 3x+y-15=0$

La longitud de la altura es: $h = d(C, AB) = \frac{|18+k-15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3+k|}{\sqrt{10}} \text{ u}$

La superficie es: $S = \pm\sqrt{40} \cdot \frac{3+k}{\sqrt{10}} = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3+k=10 \Rightarrow k=7 \\ -3-k=10 \Rightarrow k=-13 \end{cases}$

5.84. Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos $A(0, 3)$ y $C(4, 0)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices? ¿Cuál es el área del cuadrado?

La diagonal del cuadrado está sobre la recta: $3x + 4y - 12 = 0$.

La diagonal mide $d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ unidades y su punto medio es $M\left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Sea $D(a, b)$ uno de los vértices. MD es perpendicular a $3x + 4y - 12 = 0$, luego es de la forma $\lambda(3, 4)$.

Además, $|MD| = \sqrt{(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \lambda\sqrt{25} = 5\lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

Por tanto, se tiene: $\left(a-2, b-\frac{3}{2}\right) = \lambda(3, 4) \Rightarrow \begin{cases} a = 3\lambda + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} \\ b = 4\lambda + \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$

Por último, si B es el vértice que falta, $MB = -MD = \left(-\frac{3}{2}, -2\right) \Rightarrow \left(a'+\frac{3}{2}, b+2\right) = \left(-\frac{3}{2}, -2\right) \Rightarrow \begin{cases} a' = -3 \\ b' = -4 \end{cases}$

Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud del lado del cuadrado: $2l^2 = 5^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Por tanto, el área del cuadrado es $A = l^2 = \frac{25}{2} \text{ u}^2$.

5.85. En el paralelogramo de vértices $ABCD$ se conocen las coordenadas de los puntos $A(0, 3)$, $B(1, 0)$ y $C(6, 1)$. Calcula la medida de sus diagonales y el ángulo que forman.

El punto medio de AC es $M\left(\frac{6}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$. El cuarto vértice D será, por tanto:

$$\begin{cases} B(1, 0) \\ M(3, 2) \\ D(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+a}{2} = 3 \Rightarrow a = 5 \\ \frac{0+b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow D(5, 4)$$

Las medidas de las diagonales son:

$$AC = \sqrt{(6-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10} \text{ u} \text{ y } BD = \sqrt{(5-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \text{ u}$$

El ángulo que forman verifica: $\cos \alpha = \cos(\overline{AC}, \overline{BD}) = \frac{24-8}{2\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{2}} = 0,447 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26'$

5.86. Calcula el valor de k para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes coordenados un triángulo de 5 unidades cuadradas de área.

La recta corta a los ejes coordenados en $(k, 0)$ y $(0, k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\frac{k^2}{2}$.

$$\frac{k^2}{2} = 5 \Rightarrow k = \sqrt{10}$$

5.87. Calcula las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ y que determinan con los ejes coordenados un triángulo de área 4,5 unidades cuadradas.

Las rectas son $y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx + 2 - m$

Fijada una cualquiera de ellas, corta a los ejes en $(0, 2 - m)$ y $(\frac{m-2}{m}, 0)$.

El área del triángulo será

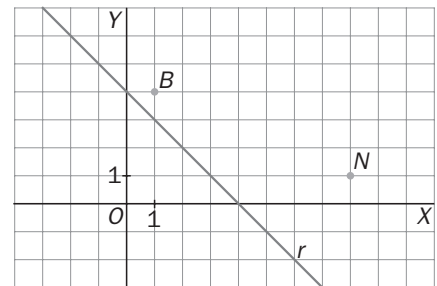
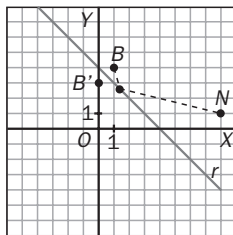
$$S = \frac{(2 - m) \frac{m - 2}{m}}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 9m \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4, m = -1.$$

Por tanto, las rectas pedidas son: $y = -4x + 6, y = -x + 3$.

5.88. Construye el camino que debe seguir la bola $B(1, 4)$ para que llegue al punto $N(8, 1)$ después de chocar en la banda $r: x + y - 4 = 0$.

El punto simétrico de B respecto de r es el $B'(0, 3)$.

La recta $B'N$ es $\frac{x}{8} = \frac{y - 3}{-2} \Rightarrow -x = 4y - 12 \Rightarrow x + 4y - 12 = 0$.



El punto M de choque será:

$$M = \begin{cases} x + 4y - 12 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{8}{3}, x = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

5.89. Dados los puntos $A(4, 0), M(6, 2)$ y $N(2, 4)$, calcula los vértices B y C del triángulo ABC de forma que M sea el punto medio del lado \overline{AB} y N el punto medio del lado AC .

$$N \text{ es el punto medio de } A \text{ y } C \Rightarrow \begin{cases} A(4, 0) \\ N(2, 4) \\ C(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4+a}{2} = 2 \Rightarrow a = 0 \\ \frac{0+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 8 \end{cases} \Rightarrow C(0, 8)$$

$$M \text{ es el punto medio de } A \text{ y } B \Rightarrow \begin{cases} A(4, 0) \\ M(6, 2) \\ B(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4+a}{2} = 6 \Rightarrow a = 8 \\ \frac{0+b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow C(8, 4)$$

5.90. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo ABC sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $M(-2, 2), N(5, 3)$ y $P(2, -2)$.

El punto medio del segmento \overline{MP} es $O(0, 0)$.

$$O \text{ será el punto medio de } \overline{AN} \Rightarrow \begin{cases} N(5, 3) \\ O(0, 0) \\ A(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5+a}{2} = 0 \Rightarrow a = -5 \\ \frac{3+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -3 \end{cases} \Rightarrow A(-5, -3)$$

$$M \text{ será el punto medio de } \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} A(-5, -3) \\ M(-2, 2) \\ B(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-5+a}{2} = -2 \Rightarrow a = 1 \\ \frac{-3+b}{2} = 2 \Rightarrow b = 7 \end{cases} \Rightarrow B(1, 7)$$

$$N \text{ será el punto medio de } \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} B(1, 7) \\ N(5, 3) \\ C(a, b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+a}{2} = 5 \Rightarrow a = 9 \\ \frac{7+b}{2} = 3 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow C(9, -1)$$

5.91. El vértice B que determina el ángulo desigual de un triángulo isósceles, ABC , está situado en el punto $(1, 2)$. Sabiendo que el vértice A tiene por coordenadas $(1, 7)$ y que el vértice C está en la recta $x - y + 1 = 0$, calcula las coordenadas del vértice C .

Al ser un triángulo isósceles, las longitudes de los lados AB y BC cumplen $AB = BC = d(A, B) = 0 + (7 - 2)^2 = 5$. C es, por tanto, el punto de la recta dada que dista 5 unidades de B . Sea $C(x, x + 1)$:

$$d(B, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (x+1-2)^2} = \sqrt{2(x-1)^2} = \pm\sqrt{2}(x-1) = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow C\left(1 + \frac{5}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \\ x = 1 - \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow C\left(1 - \frac{5}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Hay dos soluciones.

5.92. Determina las ecuaciones de los lados de un triángulo que cumple las siguientes condiciones:

i) Tiene un vértice en $A(2, -7)$.

ii) La recta $3x + y + 11 = 0$ es la altura relativa al vértice B .

iii) La recta $x + 2y + 7 = 0$ es la mediana correspondiente al vértice C .

La recta AC es perpendicular a $3x + y + 11 = 0$, luego es de la forma $x - 3y + k = 0$. Como pasa por A , ha de ser $k = -23$. Por tanto, $AC \equiv x - 3y - 23 = 0$.

Para conocer C basta calcular el punto de intersección de $x - 3y - 23 = 0$ y la altura $x + 2y + 7 = 0$:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 23 \\ 3y + 23 + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 23 \\ 5y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -6 \end{cases}$$

Por tanto, el vértice C es $(5, -6)$.

El vértice $B(a, b)$ pertenece a la altura $3x + y + 11 = 0$, por lo que se ha de cumplir $3a + b + 11 = 0$. Por

otra parte el punto medio del lado AB será $M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-7}{2}\right)$ que pertenece a la mediana $x + 2y + 7 = 0$, por

lo que se cumplirá la ecuación $\frac{a+2}{2} + 2 \cdot \frac{b-7}{2} + 7 = 0 \Rightarrow a + 2b + 2 = 0$. Resolviendo el sistema formado

por las dos ecuaciones obtenidas para a y b , encontramos las coordenadas del punto B :

$$\begin{cases} 3a + b = -11 \\ a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-4, 1)$$

Las ecuaciones de los otros dos lados se calculan ahora de forma inmediata obteniéndose:

$$AB \equiv 4x + 3y + 13 = 0, \quad BC \equiv 7x + 9y + 19 = 0$$

5.93. Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(2, -1)$ y forman triángulos isósceles con las rectas: $r: 2x - y + 5 = 0$ y $s: 3x + 6y - 1 = 0$

Las rectas que pasan por $P(2, -1)$ son de la forma $mx - y - 1 - 2m = 0$.

$$\text{Angulo entre } r \text{ y } s: \cos \alpha = \frac{|2 \cdot 3 - 6 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 6^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Por tanto, la recta buscada forma un ángulo de 45° con cada una de las rectas dadas. Tomando por ejemplo s :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2 \cdot m - 6 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{m^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot m - 6 \cdot 1|}{\sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{10}{4}(m^2 + 1) = (2m - 6)^2 \Rightarrow 3m^2 - 48m - 67 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{48 \pm \sqrt{3108}}{6} = \frac{48 \pm 2\sqrt{777}}{6}$$

Como la pendiente ha de ser $m = \frac{48 - 2\sqrt{777}}{6}$, la recta es, por tanto:

$$\left(\frac{48 - 2\sqrt{777}}{6}\right)x - y - 1 - 2 \frac{48 - 2\sqrt{777}}{6} = 0.$$

5.94. El ortocentro de un triángulo es el punto $H(5, 3)$. Los vértices A y C de dicho triángulo son los puntos $A(-1, 3)$ y $C(7, -1)$. Calcula las coordenadas del tercer vértice B .

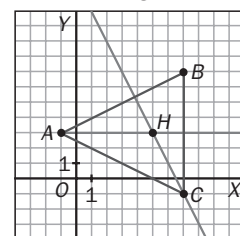
La ecuación de la recta perpendicular a AH y que pasa por C es:

$$\frac{x-7}{0} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x - 7 = 0$$

La ecuación de la recta perpendicular a CH y que pasa por A es:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x - 2y + 7 = 0$$

$$\begin{cases} x - 7 = 0 \\ x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 7 \quad y = 7 \Rightarrow B(7, 7)$$



- 5.95. Calcula las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ y que forman con la bisectriz del primero y tercer cuadrantes un ángulo de 45° .

La bisectriz de los cuadrantes primero y tercero es $x - y = 0$.

Las rectas no verticales buscadas son del tipo $y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow mx - y + 2 - m = 0$.

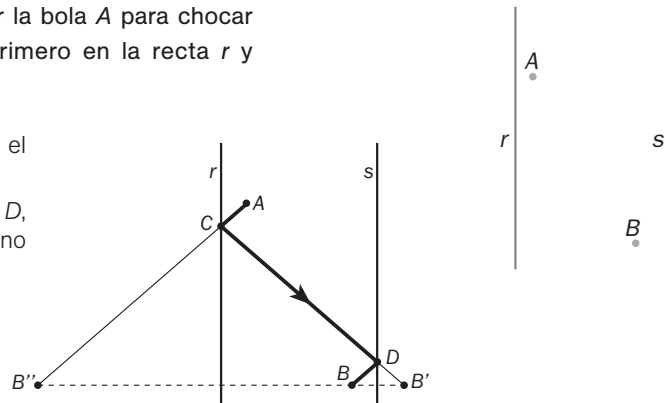
$$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{m+1}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow 1+m^2 = m+1 \Rightarrow 1+m^2 = m^2+1+2m \Rightarrow m=0 \Rightarrow \text{La recta buscada es } y=2.$$

Además, la recta vertical $x = 1$ también forma un ángulo de 45° con la bisectriz del primer cuadrante.

- 5.96. Encuentra el recorrido que tendrá que seguir la bola A para chocar con la bola B después de haber tocado primero en la recta r y después en la recta s .

Sea B' el simétrico de B respecto de s , y B'' el simétrico de B' respecto de r .

C es el punto de intersección de $\overline{AB''}$ con r , y D , el punto de intersección de $\overline{CB'}$ con s . El camino buscado es el $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$.



- 5.97. Un trapecio rectángulo tiene dos vértices en los puntos $A(2, 0)$ y $B(-1, 2)$. Los dos vértices restantes están sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$. Halla sus coordenadas. ¿Cuántas soluciones hay?

$\overline{AB} = (-3, 2)$. Por tanto, el lado AB no es paralelo a la recta $x + 2y + 3$ sobre la que están los otros dos vértices. Esto significa que los ángulos rectos del trapecio corresponden a los vértices A y B .

Las rectas perpendiculares a AB son de la forma $-3x + 2y + k = 0$.

La que pasa por A es $-3x + 2y + 6 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$\begin{cases} -3x + 2y + 6 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{-15}{4} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4}, \frac{-15}{4}\right)$$

La que pasa por B es $-3x + 2y - 7 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$\begin{cases} -3x + 2y - 7 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow Q\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$$

Los otros dos vértices son $P\left(\frac{3}{4}, \frac{-15}{4}\right)$ y $Q\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$

- 5.98. Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r: x + 2y - 2 = 0$ y que distan 2 unidades de la recta $s: 4x - 3y + 13 = 0$.

Sea X un punto genérico de r . Sus coordenadas son:

$$r \equiv x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow X(2 - 2t, t)$$

$$d(X, s) = \frac{4 \cdot (2 - 2t) - 3t + 13}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow \pm \frac{21 - 11t}{5} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 21 - 11t = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1(0, 1) \\ 21 - 11t = -10 \Rightarrow t = \frac{31}{11} \Rightarrow P_2\left(-\frac{40}{11}, \frac{31}{11}\right) \end{cases}$$

- 5.99. Los puntos $A(-2, 2)$ y $C(3, 1)$ son vértices opuestos de un rombo $ABCD$. Sabiendo que el vértice B pertenece al eje de abscisas, calcula las coordenadas de los vértices B y D y el área del rombo.

$M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es el punto medio de AC .

La diagonal AC está contenida en la recta $AC = \frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow x + 5y - 8 = 0$.

La diagonal BD está contenida en la perpendicular a AC por su punto medio.

La perpendicular a AC es de la forma $5x - y + k = 0$. Como pasa por M , se tiene que $k = -1$. Luego la recta es $5x - y - 1 = 0$.

La intersección de dicha recta con el eje de abscisas es el punto $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$, que se corresponde con el vértice B .

El vértice D verifica $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{5}, b - 0\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}, \frac{1}{2} - 0\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{4}{5}, 1\right)$

Diagonal mayor del rombo: $d' = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} u$

Diagonal menor del rombo: $d = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{34}{25}} u$

Por tanto, el área del rombo es: $\text{área} = \sqrt{26} \sqrt{\frac{34}{25}} = \frac{2\sqrt{13 \cdot 17}}{5} u^2$

- 5.100. Dadas las rectas $r: x - 2y = 2$ y $s: 2x - y + 6 = 0$, halla todas las rectas que pasen por el punto $P(1, 1)$ y que formen con r y s ángulos iguales.

Las rectas que pasan por $(1, 1)$ son de la forma: $y - 1 = m(x - 1) \Rightarrow mx - y + 1 - m = 0$.

Ángulo con $r \equiv x - 2y = 2$: $\cos \alpha = \frac{|m+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2}}$

Ángulo con $s \equiv 2x - y + 6 = 0$: $\cos \alpha = \frac{|2m+1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+m^2}}$

Por tanto: $\begin{cases} m+2 = 2m+1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow a_1: x-y=0 \\ m+2 = -2m-1 \Rightarrow m=-1 \Rightarrow -x-y+2=0 \Rightarrow a_2: x+y-2=0 \end{cases}$

- 5.101. Dos vértices opuestos de un rombo $ABOC$ son los puntos $A(6, 6)$ y $O(0, 0)$. Halla las coordenadas de B y de C sabiendo que el área del rombo es de 24 unidades cuadradas.

$M(3, 3)$ es el punto medio de AO .

Diagonal mayor del rombo: $D = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} u$

La diagonal menor debe medir $\frac{D \cdot d}{2} = 24 \Rightarrow d = \frac{48}{6\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} u$

Los vértices B y C estarán en la mediatriz del segmento \overline{AO} y a una distancia de M de $2\sqrt{2}$ unidades de longitud.

$\overline{AO} \equiv x - y = 0$

$\overline{BC} \equiv x + y + k = 0 \Rightarrow 3 + 3 + k = 0 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow x + y - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 6 - \lambda \end{cases}$

$d[(3, 3), (\lambda, 6 - \lambda)] = \sqrt{(\lambda - 3)^2 + (3 - \lambda)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \lambda^2 + 9 - 6\lambda + 9 + \lambda^2 - 6\lambda = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\lambda^2 - 12\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\lambda = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \Rightarrow B(5, 1) \\ \lambda = 1 \Rightarrow C(1, 5) \end{cases}$

5.102. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento \overline{AB} , con $A(3, 1)$ y $B(1, 2)$. Calcula las coordenadas del vértice C del triángulo, sabiendo que su área es de 4 unidades cuadradas.

$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}. \text{ Por tanto, la altura del triángulo verifica: } 4 = \frac{1}{2}\sqrt{5}h \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Buscamos un punto que esté situado en la perpendicular a AB por su punto medio y que diste de AB $\frac{8\sqrt{5}}{5}$:

$$AB \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x+3 = 2y-2 \Rightarrow x+2y-5=0, \text{ y el punto medio de } AB \text{ es } M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right).$$

La recta perpendicular es $2x - y - \frac{5}{2} = 0$. Sus puntos son de la forma $\left(t, 2t - \frac{5}{2}\right)$. Se impone ahora la condición de que disten $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ de la recta $AB \equiv x + 2y - 5 = 0$.

$$\frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{\left|t + 2\left(2t - \frac{5}{2}\right) - 5\right|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow |5t - 10| = 8 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{18}{5} \Rightarrow C\left(\frac{18}{5}, \frac{47}{10}\right) \\ t = \frac{2}{5} \Rightarrow C\left(\frac{2}{5}, -\frac{17}{10}\right) \end{cases} \text{ Por tanto, hay dos soluciones.}$$

PROFUNDIZACIÓN

5.103. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas: $r: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$ y

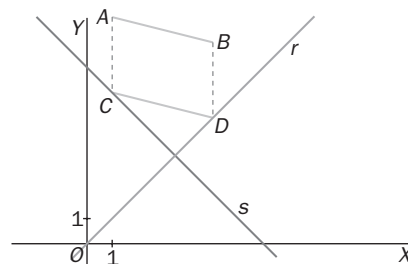
$s: \begin{cases} x = 7 - 7\lambda \\ y = 4\lambda + 6 \end{cases}$ y que forma un ángulo de 45° con la recta que une los puntos $A(0, 5)$ y $B(5, 0)$.

El punto de intersección de las rectas es el $P(7, 6)$ para $\lambda = 2$ en la primera recta y $\lambda = 0$ en la segunda. La recta que une A y B es $y = -x + 5$, que forma 45° con los ejes de coordenadas.

Por tanto hay dos soluciones al problema planteado:

La horizontal que pasa por el punto $P(7, 6) \Rightarrow y = 6$; y la vertical que pasa por el punto $P(7, 6) \Rightarrow x = 7$.

5.104. Dadas las rectas $r: x - y = 0$ y $s: x + y - 7 = 0$ y el segmento de extremos $A(1, 9)$ y $B(5, 8)$, calcula las coordenadas de los extremos de un segmento \overline{CD} de la misma longitud que \overline{AB} , paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r .



Todos los puntos de r son de la forma $D(d, d)$ y todos los puntos de s son de la forma $C(c, 7 - c)$.

Los vectores \overline{AB} y \overline{CD} son iguales. Por tanto:

$$(4, -1) = (d - c, d - 7 + c) \Rightarrow \begin{cases} d - c = 4 \\ d - 7 + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 5 \end{cases}$$

Los puntos pedidos son $C(1, 6)$ y $D(5, 5)$.

5.105. Dado el triángulo $A(2, 1)$, $B(1, -2)$ y $C(-1, 3)$:

a) Calcula el punto P , intersección de la bisectriz del ángulo \widehat{C} con el lado opuesto \overline{AB} .

b) Demuestra que $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}$

$$a) \overline{AB} \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x-6 = y-1 \Rightarrow 3x-y-5=0$$

$$\overline{AC} \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-4 = -3y+3 \Rightarrow 2x+3y-7=0$$

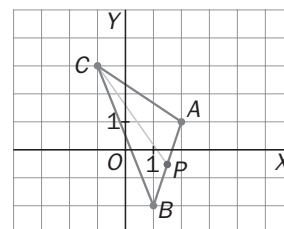
$$\overline{BC} \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow -5x-5 = 2y-6 \Rightarrow 5x+2y-1=0$$

Bisectriz interior del ángulo \widehat{C} :

$$5x + 2y - \frac{1}{\sqrt{29}} = \frac{2x + 3y - 7}{\sqrt{13}} \Rightarrow (5\sqrt{13} + 2\sqrt{29})x + (2\sqrt{13} + 3\sqrt{29})y - \sqrt{13} - 7\sqrt{29} = 0$$

Al resolver el sistema formado por las dos rectas se obtiene el punto $P\left(\frac{45 - \sqrt{377}}{16}, \frac{55 - 3\sqrt{377}}{16}\right)$

b) En efecto, al realizar el cálculo se obtiene $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = \sqrt{\frac{13}{29}}$.



- 5.106. La expresión $kx + 2(k + 1)y + 2 = 0$ representa una recta para cada valor real de k . Comprueba que todas estas rectas forman un haz de rectas secantes y calcula su vértice. ¿Están todas las rectas del haz incluidas en la expresión?

$$kx + 2(k + 1)y + 2 = 0 \Rightarrow kx + 2ky + 2y + 2 = 0 \Rightarrow 2y + 2 + k(x + 2y) = 0$$

Por tanto, se trata del haz de rectas determinado por $\begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ que se cortan en el punto $P(2, -1)$.

La única recta del haz que no está incluida en la expresión inicial es $x + 2y = 0$.

- 5.107. Una gaviota se encuentra en el punto $(-7, 2)$ y quiere volar hacia el punto $(4, 3)$ pero pasando por el eje de abscisas. Indica el recorrido que debe realizar para que la longitud total del trayecto sea mínima.

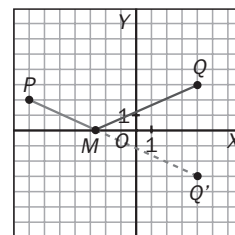
Sean $P(-7, 2)$, $Q(4, 3)$ y $Q'(4, -3)$, simétrico de Q respecto del eje de abscisas.

El trayecto ha de ser PMQ .

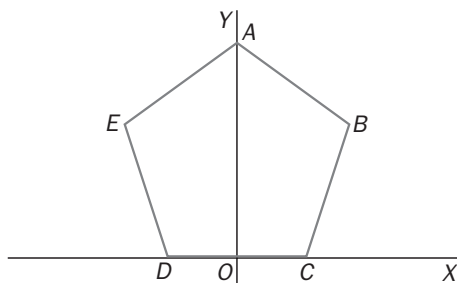
Las coordenadas de M han de ser:

$$\overline{PQ'} = \frac{x+7}{11} = \frac{y-2}{-5} \Rightarrow 5x + 11y + 13 = 0$$

$$M = \begin{cases} y = 0 \\ 5x + 11y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{13}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{13}{5}, 0\right)$$



- 5.108. Calcula, de forma exacta, las coordenadas de los vértices del pentágono regular de la figura sabiendo que su lado mide 2 unidades.



Comprueba que el cociente entre la distancia de D a B y la distancia de D a C es el número áureo

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

El ángulo interior de un pentágono regular vale $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

Por el teorema del coseno: $DB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ}$

Coordenadas de B : $x = (\sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ) - 1$, $y = \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ$

Coordenadas de A : Teniendo en cuenta que las longitudes de DA y DB son iguales:

$$x = 0, y = \sqrt{DA^2 - 1^2} = \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ - 1} = \sqrt{7 + 8 \cos 72^\circ}$$

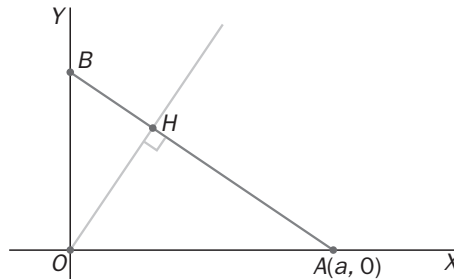
Coordenadas de E : $-(\sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ) + 1$, $y = \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ$

$C(2, 0)$ y $D(-2, 0)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ}}{2} = \frac{2\sqrt{2 + 2 \cos 72^\circ}}{2} = \sqrt{2 + 2 \cos 72^\circ} = 1,6180... = \phi$$

5.109. Dado el triángulo rectángulo de vértices $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $B(0, b)$:

- Calcula las coordenadas del punto H , intersección de la hipotenusa con la altura sobre la hipotenusa.
- Calcula las distancias \overline{OH} , \overline{HB} y \overline{HA} .
- Demuestra el teorema de la altura: $\overline{OH}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HA}$
- Demuestra el teorema del cateto: $\begin{cases} \overline{OA}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HA} \\ \overline{OB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB} \end{cases}$



a) La ecuación de la recta que contiene la hipotenusa del triángulo es: $\overline{AB} \equiv \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \Rightarrow bx + ay - ab = 0$

Sea OH la perpendicular a AB por el origen, que coincide con la altura sobre la hipotenusa. Su ecuación es: $ax - by = 0$

Las coordenadas de H son:

$$\begin{cases} bx + ay - ab = 0 \\ ax - by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx + a^2y - a^2b = 0 \\ abx - b^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)y = a^2b \Rightarrow y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}, x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow H\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)$$

$$b) \overline{OH} = \sqrt{\frac{a^2b^4 + a^4b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2(b^2 + a^2)}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\overline{HA} = \sqrt{\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2} - a\right)^2 + \left(\frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^6 + a^4b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\overline{HB} = \sqrt{\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b}{a^2 + b^2} - b\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^4 + b^6}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$c) \left. \begin{aligned} \overline{OH}^2 &= \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \\ \overline{HB} \cdot \overline{HA} &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{OH}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HA}$$

$$d) \left. \begin{aligned} \overline{OA}^2 &= a^2 \\ \overline{AB} \cdot \overline{HA} &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{OA}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HA}$$

La otra parte del teorema se comprueba de la misma forma.