10 Derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

10.I. Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas.

a) Pasa por A(−3, 3) y tiene pendiente −2.

b) Pasa por los puntos B(3, 0) y C(−2, −1).

c) Forma un ángulo de 30° con el eje X y pasa por el punto D(4, −2).

a) La ecuación buscada es de la forma $y = -2x + n$ y debe cumplir $-3 = -2 \cdot 3 + n$. Así pues, despejando $n = 3y$, la ecuación es $y = -2x + 3$.

b) La pendiente de la recta buscada es $m = \dfrac{0 - (-1)}{3 - (-2)} = \dfrac{1}{5}$ y se debe verificar que $0 = \dfrac{1}{5} \cdot 3 + n$. Así pues, la ecuación de la recta es $y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{5}$.

c) Conocemos la pendiente $m = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, luego $-2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 + n$ y la ecuación buscada es $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{4\sqrt{3} + 6}{3}$.

10.II. Calcula las TVM de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $g(x) = \cos x$, en $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ **b) $h(x) = \sqrt{2 - x^2}$, en $[-1, 1]$**

a) $\text{TVM } g\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos 0}{\dfrac{\pi}{3} - 0} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\pi}{3}} = -\dfrac{6}{\pi}$ b) $\text{TVM } h[-1, 1] = \dfrac{\sqrt{2 - 1^2} - \sqrt{2 - (-1)^2}}{1 - (-1)} = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1. Sea la función $f(x) = \sqrt{x + 4}$.

a) Calcula su tasa de variación media en el intervalo [0, h].

b) Utilizando la calculadora, estima cuánto vale la tasa de variación instantánea para x = 0.

c) Obtén el resultado anterior sin calculadora.

a) $\text{TVM } f[0, h] = \dfrac{\sqrt{h + 4} - 2}{h}$

b) $\text{TVM } f[0; 0{,}1] = \dfrac{\sqrt{4{,}1} - 2}{0{,}1} = 0{,}24845\ldots$ $\quad \text{TVM } f[0; 0{,}01] = \dfrac{\sqrt{4{,}01} - 2}{0{,}01} = 0{,}2498\ldots$

$\text{TVM } f[0; 0{,}001] = \dfrac{\sqrt{4{,}001} - 2}{0{,}001} = 0{,}24998\ldots$ $\quad \text{TVI } f(0) = \lim\limits_{h \to 0} \text{TVM } f[0, h] = 0{,}25 = \dfrac{1}{4}$

c) $\text{TVI } f(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h + 4} - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{h + 4} - 2\right)\left(\sqrt{h + 4} + 2\right)}{h\left(\sqrt{h + 4} + 2\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{h + 4} + 2\right)} = \dfrac{1}{4}$

10.2. Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ para $x = -1$.

$\text{TVI } f(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \text{TVM } f[-1, -1 + h] = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[2(-1 + h)^2 - 3(-1 + h) + 1] - [6]}{h}$

Operando se obtiene: $\text{TVI } f(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2 - 4h + 2h^2 + 3 - 3h + 1 - 6}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h^2 - 7h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2h - 7) = -7$

10.3. Utiliza la calculadora, trabajando con radianes, para obtener la tasa de variación instantánea de $f(x) = \text{sen } x$ en $x = 0$.

TVI sen (0) $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen } h - \text{sen } 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen } h}{h}$. Se calcula $\dfrac{\text{sen } h}{h}$ para valores pequeños de h:

$\dfrac{\text{sen } 0{,}1}{0{,}1} = 0{,}993334\ldots, \dfrac{\text{sen } 0{,}01}{0{,}01} = 0{,}999983\ldots, \dfrac{\text{sen } 0{,}001}{0{,}001} = 0{,}99999983\ldots$

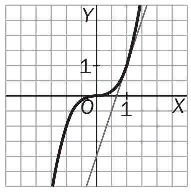
Luego TVI sen (0) $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{sen } h}{h} = 1$

10.4. Obtén la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados y dibújalas, junto con la recta obtenida en cada caso.

a) $f(x) = x^3$, en el punto P(1, 1) b) $f(x) = x^2 + 5x - 2$, para $x = -2$ c) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, para $x = 2$

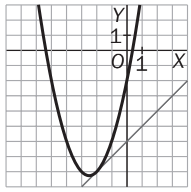
a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} =$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = 3.$

La recta tangente pasa por P(1, 1) y tiene pendiente $m = 3$, luego es de la forma $y = 3x + n$ con $1 = 3 \cdot 1 + n$. Así pues, su ecuación es $y = 3x - 2$.



b) Calculamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'(-2) =$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(-2 + h)^2 + 5(-2 + h) - 2] - [(-2)^2 + 5(-2) - 2]}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + h}{h} =$
$= \lim\limits_{h \to 0} (h + 1) = 1$

La recta tangente pasa por el punto $P(-2, f(-2)) = P(-2, -8)$ y tiene pendiente $m = 1$. Obtenemos n de la expresión $-8 = 1 \cdot (-2) + n$. La ecuación de la tangente en el punto $P(-2, f(-2))$ es $y = x - 6$.

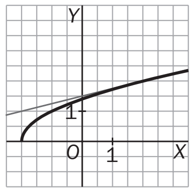


c) Calculamos la pendiente de la recta tangente:

$m = f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{(2 + h) + 2} - \sqrt{2 + 2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h + 4} - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\sqrt{h + 4} - 2)(\sqrt{h + 4} + 2)}{h(\sqrt{h + 4} + 2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{h + 4} + 2)} = \dfrac{1}{4}$

Como la recta tangente pasa por el punto $P(2, f(2)) = P(2, 2)$ y tiene pendiente $m = \dfrac{1}{4}$, su ecuación es $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$.



10.5. Sea la tabla de valores de una función f.

x	1	1,97	2	2,02	2,2	3,99	4	4,01
f(x)	2,5	6,905	7	7,059	7,5	8,98	9	9,2

a) Utiliza esta tabla para aproximar $f'(2)$.

b) A la vista de los valores de la tabla, ¿crees que existe $f'(4)$? Justifica tu respuesta.

a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$

Se toman los distintos valores de h para los que conocemos $f(2 + h)$, con h pequeño.

Si $h = -1$ $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{f(1) - f(2)}{-1} = \dfrac{2{,}5 - 7}{-1} = 5$

Si $h = -0{,}03$ $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{f(1{,}97) - f(2)}{-0{,}03} = \dfrac{6{,}905 - 7}{-0{,}03} = 3{,}1\widehat{6} \approx 3$

Si $h = 0{,}02$ $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{f(2{,}02) - f(2)}{0{,}02} = \dfrac{7{,}059 - 7}{0{,}02} = 2{,}95 \approx 3$

Luego $f'(2) \approx 3$.

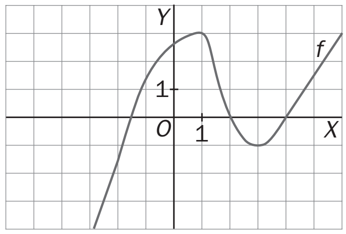
b) No, pues si calculamos $\frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$ para valores pequeños de h para los que conocemos f(4 + h), obtenemos

Si $h = -0{,}01$ $\quad \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \frac{f(3{,}99) - f(4)}{-0{,}01} = \frac{8{,}98 - 9}{-0{,}01} = 2$

Si $h = 0{,}01$ $\quad \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \frac{f(4{,}01) - f(4)}{0{,}01} = \frac{9{,}2 - 9}{0{,}01} = 20$

Por lo que parece que no va a existir $f'(4)$.

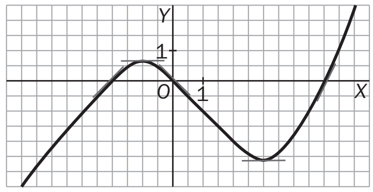
10.6. Observa la gráfica de y = f(x) y calcula, aproximadamente, $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(5)$.



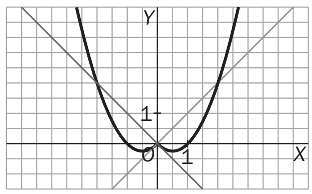
Por lo que se puede ver,

$f'(-1) \approx 2$, $f'(1) \approx 0$, $f'(0) \approx 0{,}7$, $f'(2) \approx -2$, $f'(3) \approx 0$, $f'(5) \approx 1{,}5$

10.7. Dibuja la gráfica de una función y = f(x) para que cumpla las siguientes condiciones: $f'(-2) = 1$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(3) = 0$, $f'(5) = 2$.



10.8. Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2 - |x|$. ¿Crees que tiene tangente en el origen? Intenta obtener $f'(0)$.



Como siempre que aparecen funciones que tienen en su expresión un valor absoluto, para estudiar y representar es conveniente escribirla como una función a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \le 0 \\ x^2 - x & x > 0 \end{cases}$

No tiene tangente en el origen, ya que, si nos acercáramos al origen por la izquierda, la ecuación de la tangente sería y = x, y si nos acercáramos por la derecha sería y = −x.

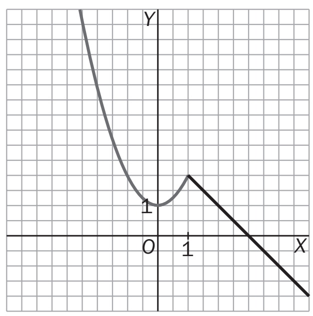
Al intentar calcular $f'(0)$ por definición obtenemos: $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$, pero la expresión de f(h) depende del signo de h:

Si $h < 0$: $f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{h^2 + h}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{h(h + 1)}{h} = 1$

Si $h > 0$: $f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h^2 - h}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h(h - 1)}{h} = -1$

Luego el límite no existe, y, por tanto, la función no es derivable en x = 0.

10.9. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ -x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



a) ¿Es f continua en x = 1?

b) Comprueba que no existe $f'(1)$.

c) ¿Existe recta tangente en P(1, f(1))?

a) La función $g(x) = x^2 + 1$ es continua en todo **R**, luego lo es en el intervalo $(-\infty, 1)$.

La función $h(x) = -x + 3$ es continua, ya que es polinómica.

Debemos estudiar, pues, los límites laterales de f en x = 1.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x + 3) = 2$, $f(1) = 2$

Luego la función también es continua en x = 1 y, por tanto, lo es en todo **R**.

b) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$, pero la expresión de $f(1+h)$ depende del signo de h:

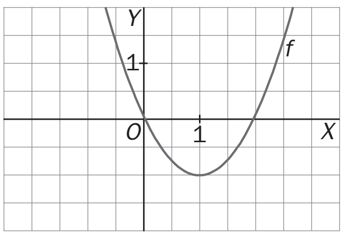
Si $h < 0$ $\quad f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{[(1+h)^2 + 1] - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h(h+2)}{h} = 2$

Si $h > 0$ $\quad f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{[-(1+h) + 3] - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h}{h} = -1$

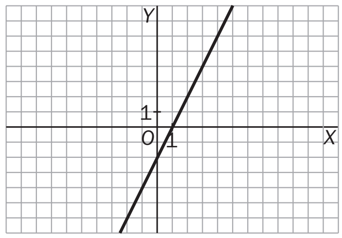
Como los límites no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

c) En la gráfica se ve que no existe tangente en $x = 1$, y además se acaba de comprobar que no es derivable en dicho punto. Por tanto, no hay tangente.

10.10. Esboza la gráfica de $y = f'(x)$ a partir de la de $y = f(x)$:



f(x)



f ′(x)

10.11. Halla la derivada de estas funciones. a) $f(x) = 5x^3$ b) $f(x) = -\dfrac{x^2}{8}$ c) $f(x) = \sqrt{2}x$

Todas las funciones son de la forma $f(x) = k \cdot x^n$ y, por tanto, sus derivadas son $f'(x) = k \cdot n\,x^{n-1}$.

a) $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$ b) $f'(x) = -\dfrac{2}{8}x = -\dfrac{x}{4}$ c) $f'(x) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$

10.12. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = x^4 - 3x$
b) $f(x) = (x^2 + 1)^2$
c) $f(x) = (x^4 + 3x^2)(-x^2 + 6x - 2)$
d) $f(x) = (2x - 7)(5 - 3x)$

a) $f'(x) = 4x^3 - 3$
b) $f'(x) = 2(x^2 + 1)(2x) = 4x^3 + 4x$
c) $f'(x) = (4x^3 + 6x)(-x^2 + 6x - 2) + (x^4 + 3x^2)(-2x + 6) = -6x^5 + 30x^4 - 20x^3 + 54x^2 - 12x$
d) $f'(x) = 2(5 - 3x) + (2x - 7)(-3) = -12x + 31$

10.13. Calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

a) $f'(x) = \left[(x - 3)^{-1}\right]' = -\dfrac{1}{(x - 3)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 - 5) - x \cdot 2x}{(x^2 - 5)^2} = -\dfrac{x^2 + 5}{(x^2 - 5)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

10.14. Si $f'(0) = 2$, $g(0) = -1$, $f(0) = 7$, $g(0) = 3$, calcula la pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ de las funciones:

a) $s(x) = 2f(x) - 3g(x)$ b) $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

a) Debemos calcular $m = s'(0)$. Como $s'(x) = 2f'(x) - 3g'(x)$, tenemos que $s'(0) = 2f'(0) - 3g'(0) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$

b) En este caso, $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, luego $p'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 2 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) = -1$

10.15. Copia y completa la siguiente tabla.

x	f(x)	g(x)	f′(x)	g′(x)	(f ∘ g)(x)	(f ∘ g)′(x)
0	1	1	2	5	4	0
1	4	3	0	1	2	4
2	−1	2	−1	3	−1	−3
3	2	0	4	2	1	4

$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 4$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 2$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = -1$

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = 1$

$(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot 5 = 0 \cdot 5 = 0$

$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(3) \cdot 1 = 4 \cdot 1 = 4$

$(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(2) \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3$

$(f \circ g)'(3) = f'(g(3)) \cdot g'(3) = f'(0) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$

10.16*. Sean $f(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = 2x$, calcula $(g \circ f)'(-1)$ y $(g \circ f)'(2)$.

Como $f'(x) = 2x + 1$, utilizando la regla de la cadena se obtiene:

$(g \circ f)'(-1) = g'(f(-1)) \cdot f'(-1) = 2(2(-1) + 1) = 2(-1) = -2$

$(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = 2(2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 5 = 10$

10.17. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x - 1)^5$

b) $f(x) = (3x + 2)^4$

c) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3)^6$

d) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

a) $f'(x) = 5(x - 1)^4 \cdot 1 = 5(x - 1)^4$

b) $f'(x) = 4(3x + 2)^3 \cdot 3 = 12(3x + 2)^3$

c) $f'(x) = 6(x^3 - 2x^2 + x - 3)^5 (3x^2 - 4x + 1)$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$

10.18. Utilizando las reglas de derivación de operaciones y la regla de la cadena, halla las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = (2x^2 - 1)(x^3 + 4x - 2)^4$

b) $f(x) = \left(\dfrac{3x - 4}{x}\right)^2$

c) $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x - 1}\right)^3$

d) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{5x - 4}$

a) $f'(x) = 4x(x^3 + 4x - 2)^4 + (2x^2 - 1) \cdot 4 \cdot (x^3 + 4x - 2)^3 \cdot (3x^2 + 4) = 4(x^3 + 4x - 2)^3(7x^4 + 9x^2 - 2x - 4)$

b) $f'(x) = 2\left(\dfrac{3x - 4}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{3 \cdot x - (3x - 4) \cdot 1}{}\right) = 8 \cdot \dfrac{3x - 4}{x^3} = \dfrac{24x - 32}{x^3}$

c) $f'(x) = 3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x - 1}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x - 1) - 2\sqrt{x}}{(2x - 1)^2}\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x - 1}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-2x - 1}{2\sqrt{x}(2x - 1)^2}\right) = \dfrac{-6x^2 - 3x}{2\sqrt{x}(2x - 1)^4}$

d) $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{5x - 4} + (x^2 - 1) \cdot \dfrac{5}{2\sqrt{5x - 4}} = \dfrac{25x^5 - 16x - 5}{2\sqrt{5x - 4}}$

10.19. A partir de las reglas de derivación de operaciones y la regla de la cadena, calcula:

a) $f(x) = \sqrt{(3x - 5)^5 - 1}$

b) $f(x) = \left(\sqrt{x^2 - x}\right)^3$

c) $f(x) = \dfrac{(x^3 + 2x)^4 - 1}{(x^3 + 2x)^3}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - x}{(3x - 1)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{5(3x - 5)^4 \cdot 3}{2\sqrt{(3x - 5)^5 - 1}} = \dfrac{15(3x - 5)^4}{2\sqrt{(3x - 5)^5 - 1}}$

b) $f'(x) = 3\left(\sqrt{x^2 - x}\right)^2 \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x^2 - x}\right)(2x - 1)$

c) $f'(x) = \dfrac{[4(x^3 + 2x)^3 \cdot (3x^2 + 2)] \cdot (x^3 + 2x)^3 - [(x^3 + 2x)^4 - 1] \cdot [3(x^3 + 2x)^2 \cdot (3x^2 + 2)]}{[(x^3 + 2x)^3]^2} =$

$= \dfrac{(x^3 + 2x)^2 \cdot [4(x^3 + 2x)^3 \cdot (3x^2 + 2) \cdot (x^3 + 2x) - 3 \cdot \left((x^3 + 2x)^4 - 1\right) \cdot (3x^2 + 2)]}{(3x^2 + 2)^6} =$

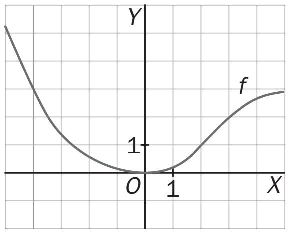
$= (3x^2 + 2)\dfrac{(x^3 + 2x)^4 + 3}{(x^3 + 2x)^4} = (3x^2 + 2) + \dfrac{3(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x)^4}$

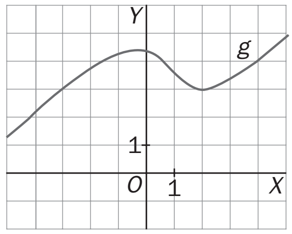
Observa que $f(x) = \dfrac{(x^3 + 2x)^4 - 1}{(x^3 + 2x)^3} = (x^3 + 2x) - \dfrac{1}{(x^3 + 2x)^3}$. Así escrita, la expresión de la derivada es mucho más sencilla.

d) $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} - 1\right) \cdot (3x - 1)^2 - \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \cdot 2(3x - 1)}{(3x - 1)^4} =$

$= \dfrac{(3x - 1)\left(\dfrac{(2x + 1)(3x - 2) - (3x - 2) - (x^2 + x) + x\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + x}}\right)}{(3x - 1)^4} = \dfrac{5x^2 - 5x + x\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + x}\,(3x - 1)^3}$

10.20*. Sean f y g las funciones dadas en las gráficas de la figura y sea $h(x) = (f \circ g)(x)$.





a) Calcula $h(-3)$ y $h(2)$.

b) Estima $f'(-3)$, $f'(2)$, $g'(-3)$, $g'(2)$.

c) ¿Cuál es el signo de $h'(-3)$? Explica cómo lo obtienes.

d) Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = h(x)$ en $P(2, h(2))$.

a) $h(-3) = f\left(g(-3)\right) = f(3) = 2$, $h(2) = f\left(g(2)\right) = f(3) = 2$

b) $f'(-3) = -1$, $f'(2) = 1$, $g'(-3) = 1$, $g'(2) = 0$

c) $h'(-3) = (f \circ g)'(-3) = f'\left(g(-3)\right) \cdot g'(-3) = f'(3) \cdot 1 = f'(3)$
Como f es creciente en $x = 3$, $h'(-3) = f'(3) > 0$

d) $P(2, h(2)) = P(2, 2)$, $h'(2) = (f \circ g)'(2) = f'\left(g(2)\right) \cdot g'(2) = f'(3) \cdot 0 = 0$
Luego la recta tangente es horizontal, y su ecuación es $y = 2$.

10.21. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $f'(x_0) \leq 0$, entonces f es decreciente en x_0.

b) Si $f'(x_0) > 0$, entonces f es creciente en x_0.

c) Si f es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0) \leq 0$.

a) Falsa. Considera $f(x) = x^2$. En $x = 0$ la función tiene un mínimo (el vértice de la parábola), luego allí no es ni creciente ni decreciente y $f'(0) = 0 \leq 0$.

b) Verdadera. En efecto: si $f'(x_0) > 0$, entonces la recta tangente en $P(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente positiva, luego f es creciente en ese punto.

c) Verdadera, ya que, usando el apartado anterior, si $f'(x_0)$ fuera positiva, la función sería creciente, luego si f es decreciente, debe ser $f'(0) \leq 0$.

10.22. Señala las abscisas de todos los puntos donde es posible que la función presente un máximo o un mínimo relativo.

Calculamos $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x + 1)(x - 1)$. La derivada se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

La función puede tener extremos relativos en los puntos $P(0, 1)$, $Q(-1, 3)$ y $R(1, -1)$.

Para saber si los tiene y si son máximos o mínimos, debemos estudiar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de esos valores de la abscisa:

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +\infty$

$15x^2$	+	+	+	+
(x + 1)	–	+	+	+
(x – 1)	–	–	–	+
f ′(x)	+	–	–	+

$f'(x) < 0$ si $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Así pues, la función tiene un máximo en $Q(-1, 3)$ y un mínimo en $R(1, -1)$. En el punto $P(0, 1)$ la función es decreciente.

10.23. ¿Es creciente la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en el punto P(0, 1)?

Como $f'(0) = 0$, la derivada en el punto no nos da mucha información sobre el crecimiento en ese punto. Estudiemos el signo de la derivada a izquierda y derecha del cero. $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$

Si $x < 0$, entonces $f'(x) > 0$, y si $0 < x < \frac{2}{3}$, entonces $f'(x) < 0$, luego en $x = 0$ la función tiene un máximo.

10.24. Determina los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

b) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1)$; $4x(x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
4x	$-$	$-$	$+$	$+$
(x + 1)	$-$	$+$	$+$	$+$
(x – 1)	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de f′	$-$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	↘	↗	↘	↗

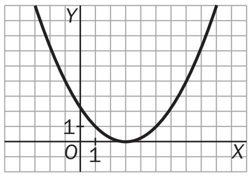
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, luego allí la función es decreciente.

$f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, luego allí la función es creciente.

La función tiene un máximo relativo en P(0, 4) y mínimos relativos en Q(−1, 3) y R(1, 3).

b) Calculamos $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 = 15x^2(x^2 + 1) \geq 0\ \forall x$. La función es creciente en todo su dominio.

10.25. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 3)$, $f'(x) > 0$ en $(3, +\infty)$, $f'(3) = 0$ y $f(3) = 0$.



10.26. Calcula el valor máximo y mínimo de:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ en el intervalo [0, 4]

b) $f(x) = x^2 - 3x$ en el intervalo [2, 5]

c) $f(t) = t^3 - 3t^2$ en el intervalo [−1, 4]

d) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ en el intervalo [−3, 4]

e) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$ en el intervalo [−5, 2]

f) $f(x) = x^4 - 6x^2$ en el intervalo [−2, 2]

En todos estos ejercicios se calcula la derivada de la función y se iguala a cero. A continuación se comparan los valores de la función en los extremos del intervalo y en los valores que anulan la derivada y pertenecen al intervalo.

a) $f'(x) = \dfrac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$; $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \in [0, 4]$

$f(0) = \sqrt{10}$; $f(3) = 1$; $f(4) = \sqrt{2}$. Luego el valor máximo de la función en ese intervalo es $\sqrt{10}$ (se alcanza para $x = 0$), y el mínimo es 1 (se alcanza en $x = 3$).

b) $f'(x) = 2, x - 3$; $0 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin [2, 5]$

$f(2) = -2$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ y $f(5) = 10$. El valor máximo de la función es 10, y el mínimo, $-\frac{9}{4}$.

c) $f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t - 2)$; se anula para $t = 0 \in [-1, 4]$ y para $t = 2 \in [-1, 4]$.

$f(-1) = -4$; $f(0) = 0$; $f(2) = -4$; $f(4) = 16$. El valor máximo de la función es 16, y el mínimo, −4, que se alcanzan, respectivamente, en $t = 4$ y en $t = -1$ o $t = 2$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 8x + 1$, que se anula si $x = \dfrac{-8 - \sqrt{52}}{6} = \dfrac{-4 - \sqrt{13}}{3} \approx -2{,}53 \in [-3, 4]$ o si

$x = \dfrac{-8 + \sqrt{52}}{6} = \dfrac{-4 + \sqrt{13}}{3} \approx -0{,}13 \in [-3, 4]$.

$f(-3) = 0$, $f\left(\dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}\right) \approx 0{,}879$, $f\left(\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}\right) \approx -6{,}065$; $f(4) = 126$. El valor máximo es 126, y el mínimo $\cong -6{,}065$.

e) $f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60$; $0 = 15x^4 - 75x^2 + 60 \Rightarrow x^2 = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = \pm 2$, $x = \pm 1$

$f(-5) = -6550$; $f(-2) = -16$; $f(-1) = -38$; $f(1) = 38$; $f(2) = 16$

El máximo es 38, y se alcanza para $x = 1$, y el mínimo, -6550, que se alcanza en $x = -5$.

f) $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$ se anula para $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. $f(-2) = -8$, $f\left(-\sqrt{3}\right) = -9$, $f(0) = 0$, $f\left(\sqrt{3}\right) = -9$ y $f(2) = -8$. El máximo es 0, y el mínimo, -9.

10.27. Halla dos números reales positivos cuyo producto sea 25 y su suma tenga el menor valor posible.

1.º Nombramos los dos números: x, y.

2.º Escribimos la función que queremos minimizar: $S = y + x$.

3.º Dicha función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $xy = 25$. Así, se puede despejar una de las variables, por ejemplo, y, y sustituir en la función S.

$$y = \frac{25}{x} \Rightarrow S = \frac{25}{x} + x$$

4.º Como los números buscados son positivos, x debe estar en el intervalo $(0, +\infty)$.

5.º Por último, buscamos el mínimo de $S = \dfrac{25}{x} + x$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

$S'(x) = -\dfrac{25}{x^2} + 1$, que se anula para $x = \pm 5$ y solamente $x = 5 \in (0, +\infty)$.

Estudiamos el signo de la derivada por la izquierda y por la derecha de $x = 5$.

	$(-\infty, 5)$	$(5, +\infty)$
Signo de f′	−	+
Comportamiento de f	↘	↗

Así pues, el mínimo se alcanza para $x = 5$, con lo que los números buscados son $x = 5$, $y = 5$, y el valor mínimo de la suma, 10.

10.28. Los beneficios de una fábrica de camisetas dependen del número de unidades producido cada día según la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, donde x indica miles de camisetas producidas al día, y f(x), miles de euros. Si las limitaciones de personal y máquinas obligan a producir entre 2000 y 2500 camisetas, ¿cuántas debe producir diariamente para obtener máximos beneficios?

Como x indica miles de camisetas, se trata de encontrar el máximo de la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ en el intervalo [2, 2,5].

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow x = 3 \notin [2;\ 2{,}5]$$
$$f(2) = 3 \qquad f(2{,}5) = 3{,}75$$

Así pues, el máximo beneficio es de 3750 euros al día y se obtiene produciendo 2500 camisetas.

10.29. Queremos delimitar una parcela rectangular para hacer una huerta y disponemos de 200 m de alambre. Solamente tenemos que utilizar alambre para tres lados de la parcela, pues para el cuarto aprovechamos un muro. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima.

1.º Llamamos x e y a los lados del rectángulo.

2.º Escribimos la función que queremos maximizar: $A = xy$.

3.º Encontramos la relación de ligadura entre las variables $2x + y = 200$. Despejamos y sustituimos en la función A:

$$y = 200 - 2x \Rightarrow A(x) = x(200 - 2x) = -2x^2 + 200x$$

4.º Como los números buscados son positivos, x debe estar en el intervalo [0, 100].

5.º Buscamos el máximo de A(x) en el intervalo [0, 100].

$$A'(x) = -4x + 200, \text{ que se anula para } x = 50 \in [0, 100]$$
$$A(0) = A(100) = 0,\ A(50) = 500$$

Así pues, el área máxima es de 500 m² y se obtiene alambrando dos lados de 50 m y el tercero de 100 m.

Derivada de una función en un punto

10.30. Considera la función $f(x) = 2^x$. Usa la calculadora para completar la siguiente tabla:

x	0	1	0,5	0,3	0,1	−0,1
$f(x) = 2^x$	1	2	1,41421	1,23114	1,07177	0,93303

Calcula la tasa de variación media en los intervalos [0; 0,5], [0; 0,3], [0; 0,1] y [−0,1; 0].

A partir de los resultados obtenidos, halla una aproximación para la tasa de variación instantánea en x = 0.

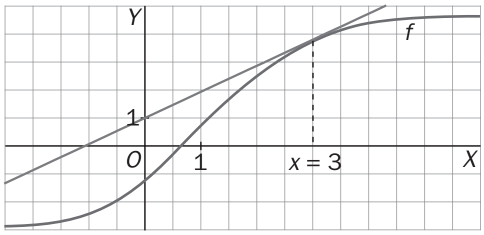
TVI $f(0) \approx 0{,}7$

TVM $f[0; 0{,}5] = \dfrac{2^{0,5} - 2^0}{0{,}5 - 0} = \dfrac{1{,}41421 - 1}{0{,}5} = 0{,}82843$ TVM $f[0; 0{,}1] = \dfrac{2^{0,1} - 2^0}{0{,}1 - 0} = \dfrac{1{,}07177 - 1}{0{,}1} = 0{,}71773$

TVM $f[0; 0{,}3] = \dfrac{2^{0,3} - 2}{0{,}3 - 0} = \dfrac{1{,}23114 - 1}{0{,}3} = 0{,}77048$ TVM $f[-0{,}1; 0] = \dfrac{2^0 - 2^{-0,1}}{0 - (-0{,}1)} = \dfrac{1 - 0{,}93303}{0{,}1} = 0{,}66967$

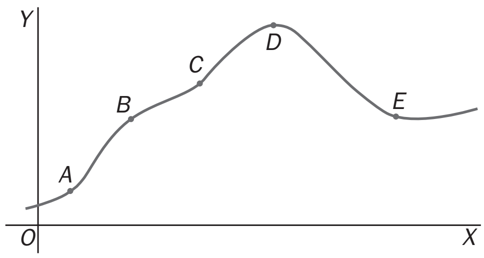
Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para la tasa de variación media en los intervalos [0; 0,1] y [−0,1; 0], parece que la tasa de variación instantánea en x = 0 será, aproximadamente TVI $f(0) \approx (0{,}71773 + 0{,}66967)/2 = 0{,}694$. En unidades posteriores se justificará que dicho número es, exactamente, ln 2 = 0,693…

10.31. Halla la derivada de f(x) en x = 3.



La recta tangente en x = 3 pasa por los puntos (−1, 0) y (1, 2). Por tanto su ecuación es $y = x + 1$. Como la derivada en x = 3 coincide con la pendiente de la tangente en el punto P(3, f(3)), tenemos que $f'(3) = 1$.

10.32. Considera la gráfica de la figura y contesta:



a) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es negativa la tasa de variación media?

b) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es máxima la tasa de variación media?

c) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es más próxima a 0 la tasa de variación media?

a) Entre D y E b) Entre A y B c) Entre B y C

10.33. El volumen de una esfera, en función del radio, viene dado por la fórmula $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Despeja el radio y, usando la calculadora, estima la tasa de variación instantánea del mismo cuando V = 1000 cm³.

$$r(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$\text{TVI } r(1000) = \lim_{h\to 0} \text{TVM } r[1000, 1000 + h] = \lim_{h\to 0} \frac{r(1000 + h) - r(1000)}{h}$$

Calculamos $\dfrac{r(1000 + h) - r(1000)}{h}$ para algunos valores pequeños de h.

$$h = 1 \Rightarrow \frac{r(1000 + 1) - r(1000)}{1} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1001}{4\pi}} - \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000}{4\pi}}}{1} = \frac{6{,}20557 - 6{,}20350}{} = 0{,}00207$$

$$h = 0{,}1 \Rightarrow \frac{r(1000 + 0{,}1) - r(1000)}{0{,}1} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000{,}1}{4\pi}} - \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000}{4\pi}}}{0{,}1} = 0{,}002067766$$

Luego parece que TVI $r(1000) \approx 0{,}0020678$

10.34. Aplicando la definición, halla las siguientes derivadas en los puntos indicados.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$, en $x = -1$ y en $x = 2$,

b) $f(x) = x^3 + x - 5$, en $x = 0$ y en $x = 5$

c) $f(x) = x^2 - 5$, en $x = -2$ y $x = 2$

a) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[2(-1+h)^2 - 3(-1+h)] - [2(-1)^2 - 3(-1)]}{} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 - 7h}{h} = (2h - 7) = -7$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[2(2+h)^2 - 3(2+h)] - 2}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 + 5h}{h} = (2h + 5) = 5$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h^3 + h - 5) - (-5)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h^2 + 1) = 1$

$f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(5+h)^3 + (5+h) - 5] - 125}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + 15h^2 + 76h}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (h^2 + 15h + 76) = 76$

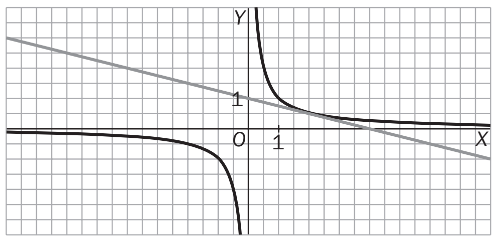
c) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(-2+h)^2 - 5] - (-1)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h - 4) = -4$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(2+h)^2 - 5] - (-1)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h + 4) = 4$

10.35. Aplicando la definición de derivada, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. Dibuja en un mismo sistema de ejes la curva y la tangente obtenida.

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2 - (2+h)}{(2+h)\cdot 2}}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(2+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ tiene pendiente $m = -\dfrac{1}{4}$ y es $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.



10.36. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ trazada desde el punto $P(0, -1)$.

Dicha tangente tocará a la curva en el punto $P(a, a^2)$, pudiendo escribir su pendiente como $2a$ o como $\dfrac{a^2 + 1}{a}$. Igualando, $\dfrac{a^2 + 1}{a} = 2a$, obtenemos $a = \pm 1$.

Los puntos de tangencia son, pues, $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$, y las rectas pedidas, $y = 2x - 1$ e $y = -2x - 1$.

10.37. Halla en qué puntos de la curva $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ la recta tangente es horizontal y calcula, en cada caso, la ecuación de dicha tangente.

La derivada en los puntos buscados tiene que ser cero, ya que la tangente es horizontal.

$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 3a^2 - 10a + 3$. Igualando a cero: $3a^2 - 10a + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Los puntos buscados son $A(3, f(3)) = (3, -11)$ y $B\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{41}{27}\right)$. La ecuación de la tangente en cada uno de los puntos es: $y = -11$ en A, $y = -\dfrac{41}{27}$ en B.

10.38. En cada caso, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a las curvas para $x = 1$.

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x - 5}$

a) Tanto la recta tangente como la normal pasan por el punto $P(1, f(1)) = P(1, -3)$. La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = 2$, y la pendiente de la recta normal es $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = 2x - 5$, y la de la normal es $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

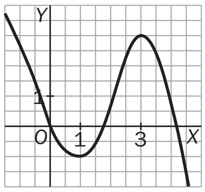
b) Tanto la recta tangente como la normal pasan por el punto $P(1, f(1)) = P\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$. La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = -\dfrac{1}{8}$, pues $f'(x) = -\dfrac{2}{(x - 5)^2}$. La pendiente de la recta normal es $m' = -\dfrac{1}{m} = 8$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -\dfrac{1}{8}x - \dfrac{3}{8}$, y la de la normal es $y = 8x - \dfrac{17}{2}$.

Aplicaciones de la interpretación geométrica

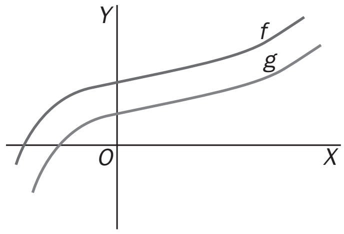
10.39. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ si tienes estos datos sobre la derivada:

$f'(x) > 0$ en el intervalo $(1, 3)$
$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y para $x > 3$
$f'(x) = 0$ para $x = 1$ y para $x = 3$



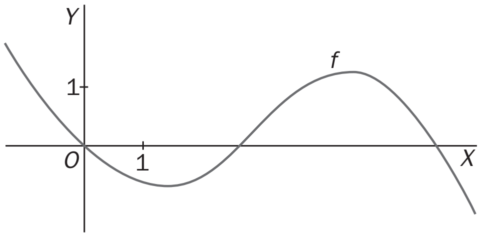
10.40. Las gráficas de las funciones f y g son las de la figura.

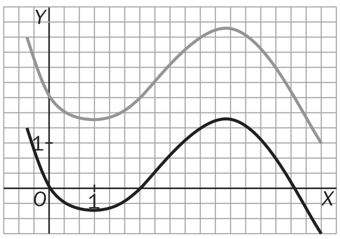
Calcula aproximadamente $h'(29)$ si $h(x) = f(x) - g(x)$.



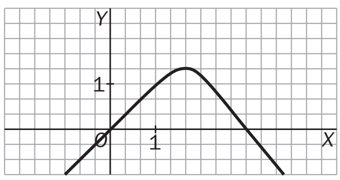
$h'(29) = f'(29) - g'(29) = 0$, pues $f = g + \text{cte}$

10.41. Si la gráfica de una función f es la de la figura, dibuja aproximadamente la gráfica de una función g tal que $g(0) = 2$ y $g'(x) = f'(x)$ para todos los números x.





10.42. Dibuja aproximadamente la gráfica de una función f para la que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(3) = 0$ y $f'(3) = -1$.



Derivada y continuidad. Función derivada

10.43. Supón que f es una función para la que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuáles son con seguridad falsas?

a) $f'(2) = 2$

b) $f(2) = 0$

c) f es continua en $x = 0$.

d) f es discontinua en $x = 2$.

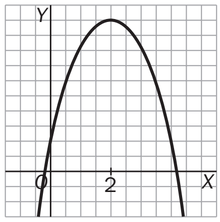
a) Falsa. Por definición de derivada en un punto sabemos que $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$, luego si una función verifica que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$, sabemos que es derivable en $x = 2$ y que $f'(2) = 0$.

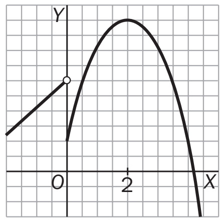
b) No tiene por qué ser cierta. Podría serlo o no.

Por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$, se verifica que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$, pero $f(2) = -2$, luego b sería falsa. Sin embargo, si $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ se verifica tanto que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$ como que $f(2) = 0$, luego b sería verdadera.

c) Puede ser cierta o falsa.

Consideremos las funciones cuyas gráficas son:





Ambas cumplen que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$ y, sin embargo, una es continua en cero y la otra no.

d) Falsa. Como vimos en el apartado a, una función que verifica que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$ es derivable en $x = 2$ y, por tanto, debe ser continua allí.

10.44. Aplicando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[5(x+h)^2 - 4(x+h) + 1] - (5x^2 - 4x + 1)}{} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5(x^2 + 2hx + h^2) - 4x - 4h + 1 - 5x^2 + 4x - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5h^2 + 10xh - 4h}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(5h + 10x - 4)}{h} = 10x - 4$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{(x^2+1) - [(x+h)^2+1]}{[(x+h)^2+1](x^2+1)}}{} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2 + 1 - x^2 - 2xh - h^2 - 1}{h[(x+h)^2+1](x^2+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2xh - h^2}{h[(x+h)^2+1](x^2+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h(2x+h)}{h[(x+h)^2+1](x^2+1)} =$

$= \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

10.45. Calcula la segunda derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = x^3 + 3$

Como $f''(x) = \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$, debemos calcular primero la derivada primera:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(x+h)^2 + 5(x+h) - 2] - (x^2 + 5x - 2)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(2x+h+5)}{h} = 2x + 5$

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[2(x+h)+5] - (2x+5)}{} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[(x+h)^3 + 3] - (x^3 + 3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2$

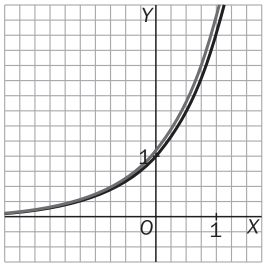
$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6xh + 3h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(6x + 3h)}{h} = 6x$

10.46. **(TIC) Calcula, aplicando la definición, la derivada de la función $f(x) = 3^x$. Observa que ambas funciones son proporcionales e identifica la constante de proporcionalidad. A continuación representa la gráfica de $f(x)$ y de su derivada, y estima la constante de proporcionalidad mencionada calculando la pendiente de la recta tangente en P(0, 1). Compara este resultado con el obtenido en el ejercicio resuelto 15.**

¿Crees que existirá un número real a para el que $f'(x) = f(x) = a^x$? ¿Entre qué valores debería encontrarse a?

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3^{x+h} - 3^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3^x \cdot 3^h - 3^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3^x \cdot (3^h - 1)}{h} = 3^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3^h - 1}{h} = 3^x \cdot f'(0)$

Luego $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ y la constante de proporcionalidad es la derivada de la función en $x = 0$.



Con ayuda de la calculadora aproximamos numéricamente el valor de la derivada en el cero:

$h = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{3^{0,1} - 1}{0{,}1} \approx 1{,}16123$ $\qquad h = -0{,}1 \Rightarrow \dfrac{3^{-0,1} - 1}{-0{,}1} \approx 1{,}04042$

$h = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{3^{0,01} - 1}{0{,}01} \approx 1{,}10467$ $\qquad h = -0{,}01 \Rightarrow \dfrac{3^{-0,01} - 1}{-0{,}01} \approx 1{,}0926$

Luego $f'(0) \approx 1{,}1$

Como $(2^x)' \approx 0{,}7 \cdot 2^x < 2^x$ y $(3^x)' \approx 1{,}1 \cdot 3^x > 3^x$, si queremos que $(a^x)' = a^x$, entonces $2 < a < 3$.

Derivadas de las operaciones con funciones

10.47. **Halla la función derivada de las funciones.**

a) $f(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 8$

b) $f(x) = \dfrac{3x^4}{4} - \dfrac{7x^3}{3} + \dfrac{9x^2}{2} + 5x - 15$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x^4 + 12x^3}{2}$

d) $f(x) = (3x^3 - 5x + 1)(x + x^5)$

a) $f'(x) = 15x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 10x + 6$

b) $f'(x) = 3x^3 - 7x^2 + 9x + 5$

c) (Ojo, esto no es un cociente) $f'(x) = \dfrac{2x - 20x^3 + 36x^2}{2} = x - 10x^3 + 18x^2$

d) Podemos derivarla como un polinomio, realizando primero el producto:

$f(x) = (3x^3 - 5x + 1)(x + x^5) = 3x^8 - 5x^6 + x^5 + 3x^4 - 5x^2 + x$

$f'(x) = 24x^7 - 30x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 10x + 1$

O directamente como producto de polinomios:

$f'(x) = (9x^2 - 5)(x + x^5) + (3x^3 - 5x + 1)(1 + 5x^4) = 24x^7 - 30x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 10x + 1$

10.48. Calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 5x^4 + 12x^3}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{3x - 2}{7 - 9x}\right)^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{(5 - x)^2}{3x - 1}$

a) Cociente: $f'(x) = \dfrac{-2(2x - 20x^3 + 36x^2)}{(x^2 - 5x^4 + 12x^3)^2}$

b) Cuadrado de un cociente de polinomios $f'(x) = 2\left(\dfrac{3x - 2}{7 - 9x}\right)\left(\dfrac{3(7 - 9x) + 9(3x - 2)}{(7 - 9x)^2}\right) = 6 \cdot \dfrac{3x - 2}{(7 - 9x)^3}$

Esta función también se puede derivar como un cociente de polinomios elevando al cuadrado el numerador y el denominador.

c) Cociente de polinomios $f'(x) = \dfrac{2x(3x + 2) - x^2 \cdot 3}{(3x + 2)^2} = \dfrac{3x^2 + 4x}{(3x + 2)^2}$

d) Cociente de polinomios $f'(x) = \dfrac{2 \cdot (5 - x) \cdot (-1) \cdot (3x - 1) - (5 - x)^2 \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \dfrac{3x^2 - 2x - 65}{(3x - 1)^2}$

10.49. Calcula estas derivadas aplicando la regla de la derivada de x^n.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^2} + 3$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1$

a) $f(x) = x^{-1} - 1 \quad f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = x^{-3} + x^{-2} \quad f'(x) = -3x^{-4} - 2x^{-3} = -\dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}$

c) $f(x) = 3x^{-4} - 2x^{-2} + 3 \quad f'(x) = -12x^{-5} + 4x^{-3} = -\dfrac{12}{x^5} + \dfrac{4}{x^3}$

d) $f(x) = 3x^{-3} - 2x^{-2} + x^{-1} - 1 \quad f'(x) = -9x^{-5} + 4x^{-3} - x^{-2} = -\dfrac{9}{x^5} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$

10.50. Encuentra las siguientes derivadas.

a) $f(t) = \sqrt{t^9} \cdot 4t^5$

b) $f(x) = \sqrt{12x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^5 \cdot \sqrt{x}}{x^{-3} \cdot (x^2)^5}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^5} + \sqrt{3}$

e) $f(x) = (3x - 1)^2 \cdot (1 - 4x)$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x - 5}$

a) $f(t) = 4t^{\frac{9}{2}+5} = 4t^{\frac{19}{9}} \Rightarrow f'(t) = 4\dfrac{19}{2}t^{\frac{19}{2}-1} = 38t^{\frac{17}{2}} = 38t^8\sqrt{t}$

b) $f'(x) = \dfrac{6}{\sqrt{12x}} = \dfrac{3}{\sqrt{3x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{3}{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^5 \cdot \sqrt{x}}{x^{-3} \cdot (x^2)^5} = x^5 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^3 \cdot x^{-10} = x^{5+\frac{1}{2}+3-10} = x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^5} + \sqrt{3} = 3x^{-5} + \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = -15x^{-6} = -\dfrac{15}{x^6}$

e) $f'(x) = 2 \cdot (3x - 1) \cdot 3 \cdot (1 - 4x) + (3x - 1)^2 \cdot (-4) = (3x - 1)(6 - 24x - 12x + 4) =$
$= (3x - 1)(-36x + 10) = 2(3x - 1)(5 - 18x)$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x - 5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x - 5) - x}{(x - 5)^2} = \dfrac{-5}{(x - 5)^2}$

10.51. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = x - 2$ que es tangente a la parábola $y = 4x^2 - 5x + 3$.

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$. Si queremos que la recta tangente sea paralela a la recta dada, se debe cumplir que $m = f'(a) = 1$. Derivamos la función e igualamos la derivada a 1 para obtener a. $\left(8a - 5 = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}\right)$. Así pues, la recta buscada tiene pendiente 1 y pasa por el punto $P\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = P\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, luego su ecuación es $y = x + \frac{3}{4}$.

10.52. Sean las funciones $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ y $g(x) = x^2 + x - 1$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a dichas funciones en el punto de abscisa $x = 0$. Comenta el resultado obtenido.

Como $f(0) = -1$ y $f'(0) = 1$ $\left(\text{ya que } f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}\right)$, la recta tangente a f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = x + 1$.

Como $g(0) = -1$ y $g'(0) = 1$ (ya que $g'(x) = 2x + 1$), la recta tangente a g en el punto de abscisa $x = 0$ es también $y = x + 1$.

Así pues, estas dos curvas son tangentes en el punto $(0, -1)$.

10.53. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcula las cuatro primeras derivadas sucesivas: f', f'', f''' y f^{IV}. A la vista de los resultados, deduce una fórmula para encontrar la derivada enésima.

Para hallar las derivadas sucesivas es conveniente escribir la función y sus derivadas como potencias de exponente negativo.

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

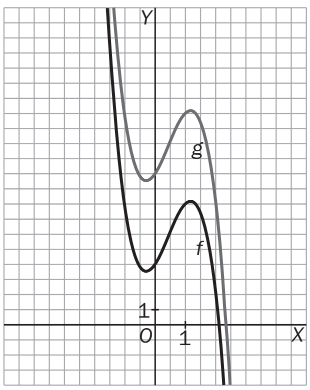
$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$ $\quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{x^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

10.54. (TIC) Utilizando la calculadora elabora una tabla de valores y representa en los mismos ejes las gráficas de las funciones:

$$f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 4 \text{ y } g(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 10$$

¿Puedes expresar g en función de f? Compara sus tasas de variación en cada punto y expresa g' en función de f'.

x	f(x)	g(x)
−2	38	44
−1	8	14
0	4	10
1	8	14
2	2	8
3	−32	−26



$g(x) = f(x) + 6$. Las tasas de variación en cada punto son iguales, pues la curva $y = g(x)$ es la misma que la curva $y = f(x)$ desplazada hacia arriba y, por tanto, las rectas tangentes en puntos de igual abscisa tienen la misma pendiente.

10.55. (TIC). Haz lo mismo que en el ejercicio anterior con las siguientes funciones:

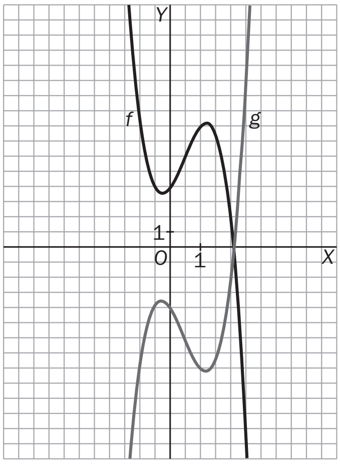
a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ y $g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x - 4$

b) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ y $g(x) = -6x^3 + 8x^2 + 6x + 8$

c) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ y $g(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3x + 4$

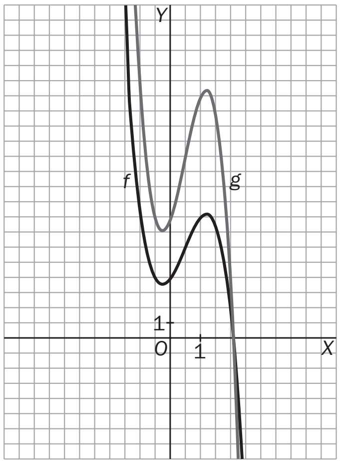
a) $g(x) = -f(x)$. Las tasas de variación en cada punto tienen signo distinto. Donde la función f crece, la función g decrece "a la misma velocidad".

$g'(x) = -f'(x)$

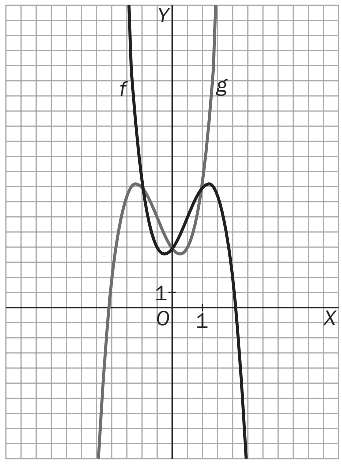


b) $g(x) = 2f(x)$. La tasa de variación de g en cada punto es el doble que la de f.

$g'(x) = 2f'(x)$



c) $g(x) = f(-x)$. Las tasas de variación en cada punto cumplen que $g'(x) = -f'(-x)$.



Derivada de la función compuesta

10.56. Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = (2x - 3)^5$, $h(x) = 2x^3 - 5x$, calcula estas derivadas en los puntos indicados.

a) $f(x) \cdot h(x)$ en $x = -1$

b) $(f \circ g)(x)$ en $x = 1$

c) $(g \circ f)(x)$ en $x = 0$

d) $\sqrt{f(x)}$ en $x = 0$

e) $\dfrac{8 \cdot g(x)}{f(x)}$ en $x = 1$

f) $\dfrac{g(x)}{5} - \dfrac{h(x)}{f(x)}$ en $x = 1$

Calculemos primero la derivada de cada una de las funciones:

$f'(x) = 6x$, $g'(x) = 10(2x - 3)^4$, $h'(x) = 6x^2 - 5$

a) $(f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$. Entonces, $(f \cdot h)'(-1) = f'(-1) \cdot h(-1) + f(-1) \cdot h'(-1) =$
$= -6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -14$

b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Entonces, $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(-1) \cdot 10 = -6 \cdot 10 = -60$

c) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Entonces, $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(1) \cdot 0 = 0$

d) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Entonces, $\left(\sqrt{f}\right)'(0) = \dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = \dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0$

e) $\left(\dfrac{8 \cdot g(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{8 \cdot g'(x)f(x) - 8 \cdot g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$

Entonces, $\left(\dfrac{8 \cdot g}{f}\right)'(1) = \dfrac{8 \cdot g'(1) \cdot f(1) - 8 \cdot g(1) \cdot f'(1)}{(f(1))^2} = \dfrac{8 \cdot 10 \cdot 4 - 8 \cdot (-1) \cdot 6}{16} = \dfrac{8 \cdot 46}{16} = 23$

f) $\left(\dfrac{g(x)}{5} - \dfrac{h(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{g'(x)}{5} - \dfrac{h'(x) \cdot f(x) - h(x) \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$

Entonces, $\left(\dfrac{g}{5} - \dfrac{h}{f}\right)'(1) = \dfrac{g'(1)}{5} - \dfrac{h'(1) \cdot f(1) - h(1) \cdot f'(1)}{(f(1))^2} = \dfrac{10}{5} - \dfrac{1 \cdot 4 - (-3) \cdot 6}{4^2} = 2 - \dfrac{11}{8} = \dfrac{5}{8}$

10.57. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = (3x^3 - 5x + 2)^3$ c) $f(x) = (x^4 + x^2 - 3)^{-2}$ e) $f(x) = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}}$

b) $f(x) = (x^5 - 2x^2)^4$ d) $f(x) = (3x^2 - x)^{-4}$ f) $f(x) = \sqrt{1 - x^4}$

a) $f'(x) = 3(3x^3 - 5x + 2)^2(9x^2 - 5)$

b) $f'(x) = 4(x^5 - 2x^2)^3 \cdot (5x^4 - 4x)$

c) $f'(x) = -2(x^4 + x^2 - 3)^{-3}(4x^3 + 2x) = \dfrac{-8x^3 - 4x}{(x^4 + x^2 - 3)^3}$

d) $f'(x) = -4(3x^2 - x)^{-5} \cdot (6x - 1) = \dfrac{-24x + 4}{(3x^2 - x)^5}$

e) $f'(x) = \dfrac{6x - \sqrt{5}}{2\sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}}}$

f) $f'(x) = \dfrac{-4x^3}{2\sqrt{1 - x^4}} = -\dfrac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}}$

10.58. Halla las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x - 1}\right)^3$ d) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$ g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}} + x^{-1}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2}}$ e) $f(x) = (2x - 4)^4 + \sqrt{x^2 + 1}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}$ f) $f(x) = \left(\sqrt{x}(x - 3)\right)^2$

a) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x + 3}{x - 1}\right)^2 \cdot \dfrac{(x - 1) - (x + 3)}{(x - 1)^2} = -12\dfrac{(x + 3)^2}{(x - 1)^4}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x + 1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{x^2 - (x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{x + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{-x(x + 2)}{x^4} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2}{x + 1}} \cdot \dfrac{x + 2}{x^3} =$

$= -\dfrac{(x + 2)\sqrt{x + 1}}{2x^2(x + 1)}$

c) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot x - \sqrt{x^2 - 3}}{x^2} = \dfrac{x^2 - x^2 + 3}{x^2\sqrt{x^2 - 3}} = \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2 - 3}}$

d) $f'(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

e) $f'(x) = 4(2x - 4)^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + (2x - 4)^4 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 8(2x - 4)^3 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + (2x - 4)^4 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \dfrac{8(2x - 4)^3 \cdot (x^2 + 1) + (2x - 4)^4 x}{\sqrt{x^2 + 1}} = (2x - 4)^3 \cdot \dfrac{8 \cdot (x^2 + 1) + (2x - 4) \cdot x}{\sqrt{x^2 + 1}} =$

$= (2x - 4)^3 \cdot \dfrac{10x^2 - 4x + 8}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) $f'(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{x}(x - 3)\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x - 3) + \sqrt{x}\right) = (x - 3) \cdot (x - 3 + 2x) = (x - 3)(3x - 3)$

Observa que $f(x) = \left(\sqrt{x}(x - 3)\right)^2 = x(x - 3)^2$ y de este modo es más fácil calcular la derivada.

g) $f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - x^{-2} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x^5}} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-3 - 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 1) - x \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2} = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2(\sqrt{x} - 1)^2}$

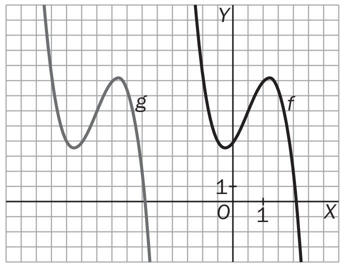
10.59. (TIC) Representa en los mismos ejes las gráficas de las funciones:

$$f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 4 \text{ y } g(x) = -3(x+5)^2 + 4(x+5)^2 + 3(x+5) + 4$$

¿Puedes expresar g en función de f? Compara la pendiente de la recta tangente a f en $(a + 5, f(a + 5))$ con la pendiente de la recta tangente a g en $(a, g(a))$ para algunos valores de a. ¿Qué observas?

Expresa la función g′ en función de f′.

$g(x) = f(x + 5)$. Las curvas son iguales salvo por un desplazamiento en sentido horizontal. La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a + 5$ es paralela a la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, luego sus pendientes son iguales y, por tanto, $g'(x) = f'(x + 5)$.



10.60. (TIC) Representa en los mismos ejes las gráficas de las funciones:

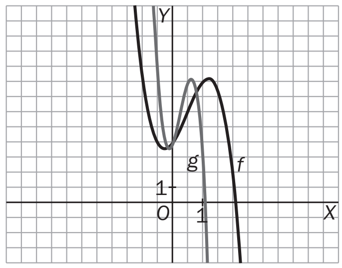
$$f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x + 4 \text{ y } g(x) = -24x^3 + 16x^2 + 6x + 4$$

Observa que $g(x) = f(2x)$. Compara la pendiente de la recta tangente a f en $(2a, f(2a))$ con la pendiente de la recta tangente a g en $(a, g(a))$ para algunos valores de a. ¿Qué observas?

Expresa la función g′ en función de f′.

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2a$ está "menos inclinada" que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

$g'(x) = 2 \cdot f'(2x)$.



Crecimiento y decrecimiento. Extremos

10.61. Encuentra los máximos y mínimos relativos de estas funciones e indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Si en algún caso no tuviera extremos relativos, explica con claridad por qué es así.

Utiliza los datos obtenidos para esbozar la gráfica de cada función.

a) $p(x) = x^2 - 5x + 12$

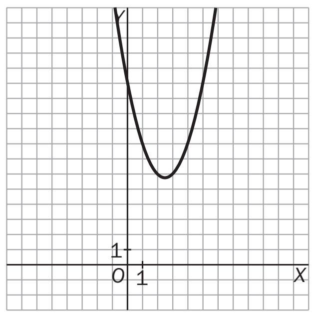
b) $r(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) $q(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

d) $s(x) = (x - 3)(x + 2)$

a) $p'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
Signo de f′	−	+
Comportamiento de f	↘	↗

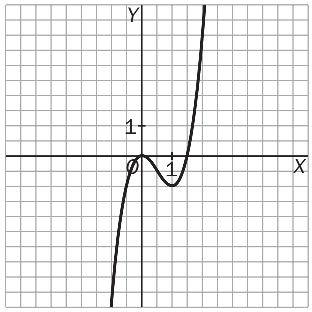


Luego p es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

Tiene un mínimo (absoluto) en el punto $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{23}{4}\right)$.

El ejercicio está resuelto en la forma general, pero en el caso de una parábola, los alumnos saben que alcanza su único extremo en el vértice y, mirando el signo del coeficiente principal, saben si es cóncava hacia arriba o hacia abajo, de modo que pueden decidir si es un máximo o un mínimo sin necesidad de estudiar el signo de la derivada.

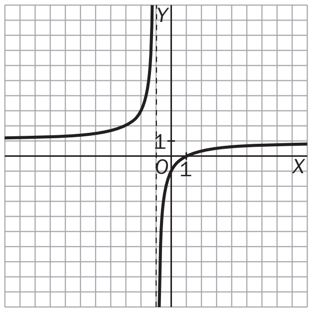
b) $r'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 1$



	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
6x	$-$	$+$	$+$
(x − 1)	$-$	$-$	$+$
Signo de f′	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	↗	↘	↗

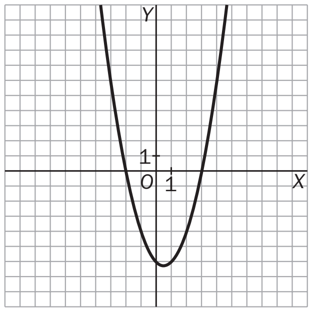
La función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Por tanto, tiene un máximo relativo en el punto $P(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $Q(1, -1)$.

c) $q'(x) = \dfrac{(x + 1) - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{(x + 1)^2} > 0$ para cualquier valor de $x \neq -1$.



Luego la función es creciente en todo su dominio ($\mathbb{R} - \{-1\}$).

d) $s'(x) = (x + 2) + (x - 3) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$



Como es una parábola cóncava hacia arriba y con vértice en $P\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$, sabemos que en el vértice tiene un mínimo (absoluto) y que es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

10.62. Calcula qué valores deben tener las constantes a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(-2, -3)$ y un máximo relativo para $x = 1$ y $f(0) = -1$.

Planteamos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas con las condiciones:

En primer lugar, si el polinomio tiene un mínimo en $P(-2, -3)$, debe cumplirse que $f(-2) = -3$ y que $f'(-2) = 0$, que dan lugar a las ecuaciones:

$-3 = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = -3$ y

$3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + c = 0 \Rightarrow 12a - 4b + c = 0$

Si la función tiene un máximo relativo en $x = 1$, debe verificarse que $f'(1) = 0$, luego tenemos la ecuación:

$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Además, para que se verifique que $f(0) = -1$ debe ser $d = -1$.

Planteamos las ecuaciones haciendo $d = -1$ y obtenemos el sistema $\begin{cases} -8a + 4b - 2c = -2 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 9 \end{cases}$ cuya única solución es

$a = -\dfrac{1}{5}$, $b = -\dfrac{3}{10}$, $c = \dfrac{6}{5}$

Por tanto, la ecuación del único polinomio de grado tres que verifica las condiciones anteriores es

$f(x) = -\dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{6}{5}x - 1$

10.63. Halla los valores de las constantes a, b y c que hacen que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(-1, 20)$ y tenga un máximo relativo en $Q(3, 12)$.

Planteamos tres ecuaciones con tres incógnitas: por un lado, para que la parábola pase por el punto $P(-1, 20)$ se debe verificar que $20 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$.

Además, si tiene un máximo relativo en $Q(3, 12)$, por una parte sabemos que Q es un punto de la parábola y, por tanto, se debe verificar que $12 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$, y por otra, que la derivada de la función en $x = 3$ debe ser nula, $2a \cdot 3 + b = 0$.

Así pues, debemos resolver el sistema $\begin{cases} a - b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 12 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$ que tiene por solución $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -3$, $c = \dfrac{33}{2}$.

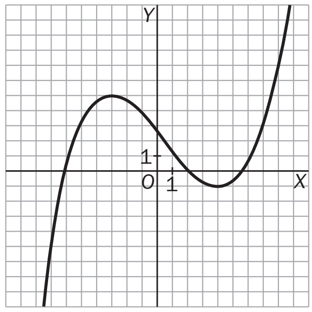
Por tanto, la ecuación de la única parábola que cumple las condiciones es $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{33}{2}$.

10.64. Esboza la grafica de una función que tenga las siguientes propiedades.

a) $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o si $x > 4$

b) $f'(x) < 0$ si $-3 < x < 4$

c) $f(-3) > 4$ y $f(4) > -2$



Optimización

10.65. (TIC) Utiliza una calculadora gráfica para representar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} - x^3$. Encuentra el máximo absoluto y el mínimo absolutos de la función en el intervalo $[-5, 5]$.

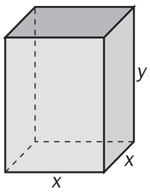
$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x^3 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)} - 3x^2 = \frac{\dfrac{3x^2(x^2 + 1) - x^4}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} - 3x^2 = \frac{2x^4 + 3x^2 - 3x^2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

Igualando a cero el numerador: $x^2\left(2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}\right) = 0$ si $x = 0$ o si $2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = 0$, que no tiene raíces reales.

En este ejercicio se observa la dificultad de resolver algunas ecuaciones y la utilidad de las calculadoras gráficas en estos casos.

Gráficamente se observa que el máximo en el intervalo se alcanza cuando $x = -5$ y es $M = 125\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)$, y el mínimo cuando $x = 5$ y es $m = -125\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)$.

10.66. Calcula las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm² de área total para que el volumen sea máximo.



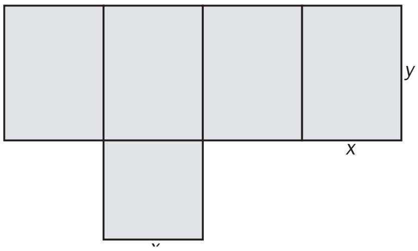
1.º Nombramos las dimensiones de la caja x, y.

2.º Escribimos la función que queremos maximizar:

$$V = x^2y$$

3.º Dicha función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura del área total: $x^2 + 4xy = 192$. Así, se puede despejar la y, y sustituir en la función V.

$$y = \frac{192 - x^2}{4x} \Rightarrow V = x^2\frac{192 - x^2}{4x} = -\frac{1}{4}x^3 + 48x$$



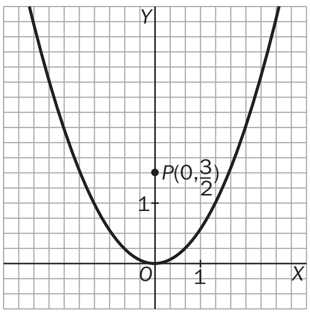
4.º Como los números buscados son positivos, x debe estar en el intervalo abierto $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

5.º Por último, se busca el mínimo de $V = -\frac{1}{4}x^3 + 48x$ en el intervalo $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

$$V' = -\frac{3}{4}x^2 + 48 \Rightarrow x = 8 \in \left(0, \sqrt{192}\right) \text{ o } x = -8 \notin \left(0, \sqrt{192}\right)$$

Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero y V(8) es mayor que cero, el máximo de la función V se alcanza en x = 8, y tenemos que las dimensiones de la caja que maximizan el volumen son $8 \times 8 \times 4$ cm y su volumen será, por tanto, de 256 cm³.

10.67. Halla los puntos de la parábola $y = x^2$ de abscisa no negativa que estén más cerca del punto $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$.



1.º Nombramos las coordenadas del punto buscado x, y.

2.º Escribimos la función que queremos minimizar:

$$D = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

3.º Dicha función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura, ya que el punto P(x, y) pertenece a la parábola $y = x^2$. Sustituimos en

$$D = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

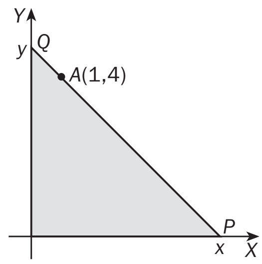
4.º Como la abscisa x debe ser no negativa, tenemos que $x \in [0, +\infty)$.

5.º Por último, buscamos el mínimo de $D = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

$$D' = \frac{2x + 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}} = 0 \text{ si } 2x + 4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \text{ y } x = -1 \notin [0, +\infty).$$

Como $D(0) = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} D(x) = +\infty$ y $D(1) = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$, se tiene que la distancia mínima es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ y se alcanza en el punto de la parábola P(1, 1).

10.68. De todas las rectas que pasan por A(1, 4) calcula la ecuación de la que determina con los semiejes positivos un triángulo de área mínima.



1.º Nombramos los puntos de corte con los ejes x, y.

2.º Escribimos la función que queremos minimizar: $A = \dfrac{x \cdot y}{2}$.

3.º Dicha función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura por estar los puntos P(x, 0), Q(0, y) y A(1, 4) alineados.

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{-1}{y-4} \Rightarrow 4x + y - xy = 0$$

Así, se puede despejar la y y sustituir en la función A.

$$4x = y(x-1) \Rightarrow y = \frac{4x}{x-1} \Rightarrow A = \frac{x \cdot \dfrac{4x}{x-1}}{2} = \frac{2x^2}{x-1}$$

4.º Como los números buscados son positivos, debe cumplirse: $x > 0$ e $y = \dfrac{4x}{x-1} > 0$, luego x debe pertenecer al intervalo abierto $(1, +\infty)$.

5.º Por último, buscamos el mínimo de $A = \dfrac{2x^2}{x-1}$ en el intervalo $(1, +\infty)$.

$A' = \dfrac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = 0$ si $2x^2 - 4x = 2x(x-2) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0 \notin (1, +\infty)$ y $x = 2 \in (1, +\infty)$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} A(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$ y $A(2) = 8$, entonces para $x = 2$ hay un mínimo de la función A y tenemos que la recta que hace que el área del triángulo sea mínima es $y = -4x + 8$, y el área encerrada es de 8 u^2.

Síntesis

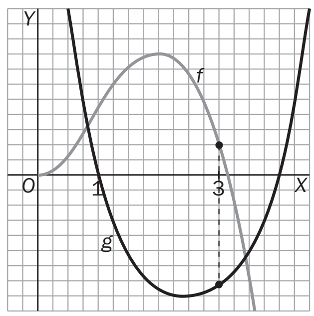
10.69. Investiga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f(3) > g(3)$, entonces $f'(3) \geqslant g'(3)$.

b) Si $f(x) \cdot g(x) = x$, entonces no hay ningún valor de x para el que se anulen simultáneamente $f'(x)$ y $g'(x)$.

c) La gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ no tiene ningún punto con tangente paralela a la recta $y = x$.

a) Falsa. En la siguiente gráfica se observa que $f(3) > g(3)$; sin embargo, f es decreciente en $x = 3$, luego su derivada será negativa, $f'(3) < 0$, y g es creciente en $x = 3$, luego su derivada será positiva allí, $g'(3) > 0$, y, por tanto, $f'(3) < g'(3)$.



b) Verdadera. Como $f(x) \cdot g(x) = x$, derivando a ambos lados obtenemos $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 1$. Si existiera un valor de x para el que $f'(x) \cdot g'(x) = 0$, tendríamos que $0 \cdot g(x) + f(x) \cdot 0 = 1$, ¡¡0 = 1!!, lo que es absurdo. Luego no existe ningún valor de x para el que se anulen simultáneamente $f'(x)$ y $g'(x)$.

c) Falsa. La recta $y = x$ es la tangente a la curva en el origen. Pero no hay más rectas tangentes a la curva y paralelas a esa, pues al resolver $f'(x) = 1$ obtenemos como única solución $x = 0$ doble:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = (x^2+1)^2 \Leftrightarrow x^2(x^2+3) = 0$$

10.70. Sean f y g dos funciones tales que

$$f(0) = 0,\ g(0) = 1$$
$$f'(x) = g(x) \ \text{ y } \ g'(x) = -f(x)$$

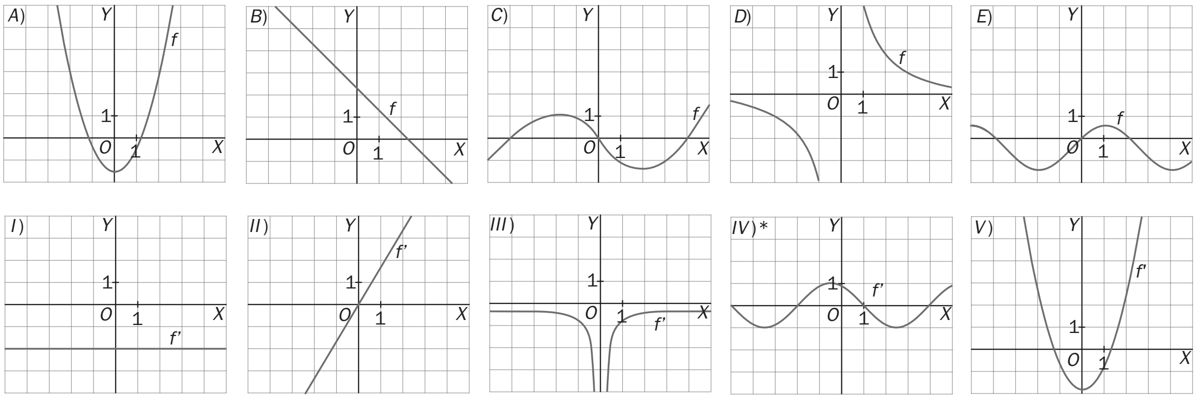
Considera la función $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$.

Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$, sea cual sea x.

$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) + 2g(x)(-f(x)) = 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) = 0$

De que $h'(x) = 0$ para todo x deducimos que h(x) es constante, luego $h(x) = h(0)$ para cualquier valor de x y, por tanto, $h(x) = f^2(x) + g^2(x) = f^2(0) + g^2(0) = 0 + 1 = 1$ sea cual sea x.

10.71. Empareja cada una de estas gráficas con las gráficas de su correspondiente derivada.



(A, II), (B, I); (C, V); (D, III) y (E, IV)

La gráfica de la derivada de la función representada en A debe pasar por el punto (0, 0), ya que la función tiene mínimo para x = 0. Además, debe ser negativa a la izquierda del cero y positiva a la derecha. La única gráfica que cumple esto es la II.

Como B es una recta, su derivada debe ser constante, luego es I.

La función C tiene un máximo a la izquierda del cero y un mínimo a la derecha, luego su derivada debe cortar al eje de abscisas en esos dos puntos. Así pues, es V.

La derivada de D es III, porque al ser la función en D siempre decreciente su derivada ha de ser siempre negativa.

Por último, la derivada de E es IV.

PROBLEMAS

10.72. La concentración media mensual de sal, en gramos por litro, en una laguna costera durante un año ha variado de acuerdo a los datos recogidos en la siguiente tabla.

E	F	M	A	M	J
12	16	19	21	23	24
J	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
24	23	22	20	17	14

a) ¿Cuál es la variación media de la salinidad entre enero y julio? ¿Y entre marzo y octubre?

b) La función $s(t) = -0{,}0004t^2 + 0{,}15t + 10$, donde s es la salinidad y t es el día del año (de 0 a 365), representa bien la variación reflejada en la tabla. Utilizando esta función, calcula qué día se produjo el valor máximo de salinidad.

a) $\text{TVM } s[E, J] = \dfrac{s(J) - s(E)}{J - E} = \dfrac{24 - 12}{7 - 1} = \dfrac{12}{6} = 2$ gramos por litro/mes

$\text{TVM } s[M, O] = \dfrac{s(O) - s(M)}{O - M} = \dfrac{20 - 19}{10 - 3} = \dfrac{1}{7} \approx 0{,}14$ gramos por litro/mes

b) $s'(t) = -0{,}0008t + 0{,}15$. Igualando a cero se obtiene $0 = -0{,}0008t + 0{,}15 \Rightarrow t = 187{,}5$, que corresponde al máximo absoluto de la función s(t), ya que es una parábola cóncava hacia abajo. Ese máximo se alcanza entre los días 6 y 7 de julio.

10.73. Se lanza verticalmente una partícula. Su ecuación del movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ [t se mide en segundos, y s(t) en metros)]. Se pide:

a) ¿Con qué velocidad inicial se lanza la partícula?

b) ¿En qué instante la partícula empieza a descender?

c) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?

d) ¿Cuánto tiempo está la partícula en movimiento?

e) ¿Qué velocidad lleva la partícula en los instantes t = 3 y t = 7?

f) ¿Por qué las velocidades en t = 3 y t = 7 son de distinto signo?

a) La velocidad de la partícula en un instante t viene dada por la función $s'(t) = -12t + 48$, entonces la velocidad inicial es de $s'(0) = 48$ m/s.

b) La partícula empieza a descender cuando la función de velocidad es cero (o cuando llega a su máxima altura, si se prefiere) .

$s'(t) = -12t + 48 = 0$ si $t = 4$ s

c) $s(4) = 96$ m. Luego la altura máxima es de 96 m.

d) Como tarda lo mismo en subir que en bajar, serán 8 s.

Queremos que $s(t) = -6t^2 + 48t = -6t(t - 8) = 0$ si $t = 0$ o $t = 8$. Luego la partícula está en movimiento 8 s.

e) $s'(3) = 12$ m/s; $s'(7) = -36$ m/s

f) Porque los primeros 4 segundos la partícula está subiendo (signo positivo de la velocidad), y después de esos 4 segundos la partícula comienza a bajar (cambia el sentido del movimiento, luego cambia el signo de la velocidad).

10.74. La ecuación que representa el movimiento de una partícula es $s(t) = 4t^3 + 6t^2 + 2$, donde t viene medido en segundos y s(t) es la distancia en metros a la que se encuentra del punto de partida en el instante t. Calcula la velocidad media de la partícula en los intervalos [2, 3] y [2, 2 + h] y su velocidad en el instante t = 2.

$$\text{TVM } s[2, 3] = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{164 - 58}{1} = 106 \text{ m/s}$$

$$\text{TVM } s[2, 2 + h] = \frac{s(2 + h) - s(2)}{(2 + h) - 2} = \frac{4(2 + h)^3 + 6(2 + h)^2 + 2 - 58}{} =$$

$$= \frac{4(h^3 + 6h^2 + 12h + 8) + 6(h^2 + 4h + 4) + 2 - 58}{h} = \frac{h(4h^2 + 30h + 72)}{} = 4h^2 + 30h + 72$$

La velocidad en el instante t = 2 será $s'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \text{TVM } s[2, 2 + h] = \lim\limits_{h \to 0} (4h^2 + 30h + 72) = 72$ m/s.

10.75. Una partícula se mueve sobre un eje según la siguiente ecuación de movimiento:

$s(t) = 4t^2 - 8t - 3$, donde t indica el tiempo en segundos, y s(t), la distancia orientada, en metros, al origen.

a) ¿Dónde está situada la partícula en el momento de empezar a moverse?

b) Estudia la posición de la partícula en los instantes t = 1 y t = 5.

c) ¿En qué instante la partícula se detiene y cambia el sentido de su movimiento?

a) Como $s(0) = -3$, la partícula está a una distancia de 3 metros a la izquierda del origen.

b) $s(1) = -7$ m y $s(5) = 57$ m

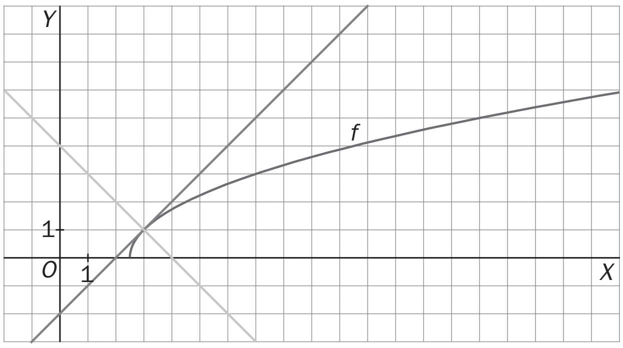
c) La partícula se detiene cuando su velocidad es cero, y cambiará el sentido del movimiento cuando su velocidad cambie de signo. Como la función que describe la velocidad viene dada por $s'(t) = 8(t - 1)$, la partícula se detiene y cambia el sentido de su movimiento cuando t = 1.

10.76. Calcula el área del triángulo formado por el eje de abscisas y las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = \sqrt{2x - 5}$ en el punto de abscisa 3.

Si R es el punto de la curva en el que vamos a calcular las rectas tangente y normal, sus coordenadas son $R(3, f(3)) = R(3, 1)$ y, por tanto, la altura del triángulo es 1.

Debemos calcular las coordenadas de los puntos P (punto de corte de la recta tangente con el eje de abscisas) y Q (punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas).

Comenzamos calculando las ecuaciones de la recta tangente y normal.



La recta tangente pasa por el punto R(3, 1) y su pendiente es $m = f'(3)$. Como $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x - 5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 5}}$, tenemos que $m = 1$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = x - 2$ y las coordenadas del punto P son P(2, 0).

La recta normal pasa por el punto R(3, 1) y es perpendicular a la recta tangente, luego su pendiente es:

$m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{f'(3)} = -1.$

Por tanto, la ecuación de la normal es $y = -x + 4$ y las coordenadas del punto Q son Q(4, 0). Conociendo P y Q sabemos que la base del triángulo mide 2 u. Así pues, el área del triángulo es $A = \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 2\ u^2$.

10.77. La base de un rectángulo crece a ritmo constante de 2 cm/s, y su altura crece a ritmo constante de 3 cm/s. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de la función que da el área cuando la base y la altura son de 5 y de 4 cm, respectivamente?

Sabemos que la derivada de la función L(t) que describe la longitud de la base en el instante t es $L'(t) = 2$ y que la derivada de la función A(t) que describe la altura en el instante t es $A'(t) = 3$.

Entonces, la función que describe el área del rectángulo en el instante t es $S(t) = L(t) \cdot A(t)$, cuya derivada es $S'(t) = L'(t) \cdot A(t) + L(t) \cdot A'(t) = 2A(t) + 3L(t)$. Luego si $L(t_1) = 5$ y $A(t_1) = 4$, $S'(t_1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23\ cm^2/s$.

Otra forma de hacerlo sería la siguiente:

La función que describe la longitud de la base en el instante t es de la forma $L(t) = L_0 + 2t$, donde L_0 es la longitud inicial.

La función que describe la altura en el instante t es de la forma $A(t) = A_0 + 3t$, donde A_0 es la altura inicial.

La función que describe el área del rectángulo en el instante t es $S(t) = L(t) \cdot A(t) = (L_0 + 2t)(A_0 + 3t)$, cuya derivada es $S'(t) = 2 \cdot (A_0 + 3t) + 3 \cdot (L_0 + 2t) = 2A(t) + 3L(t)$. Luego si $L(t_1) = 5$ y $A(t_1) = 4$, $S'(t_1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23\ cm^2/s$.

10.78. Halla los valores de la constante k para los que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x - k)x$ en el punto de abscisa 1 sean:

a) Paralelas

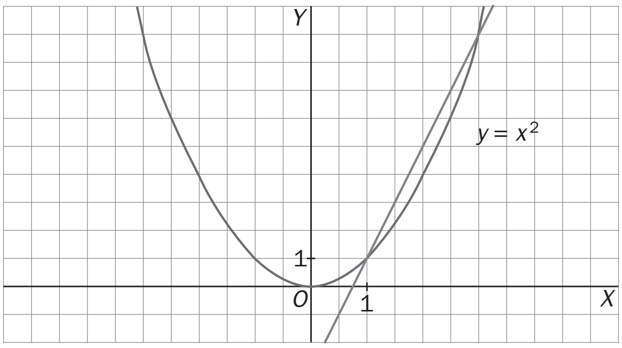
b) Perpendiculares

Se calculan las derivadas en $x = 1$: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3$, $g(x) = x^2 - kx \Rightarrow g'(x) = 2x - k \Rightarrow g'(1) = 2 - k$

a) Si las tangentes son paralelas: $g'(1) = f'(1) \Rightarrow 2 - k = 3 \Rightarrow k = -1$

b) Si las tangentes son perpendiculares: $g'(1) = -\dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow 2 - k = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow k = \dfrac{7}{3}$

10.79. Calcula la ecuación de las tangentes a la curva $y = x^2$ que sean paralelas a la recta que une los puntos de abscisas 1 y 3 de la misma.



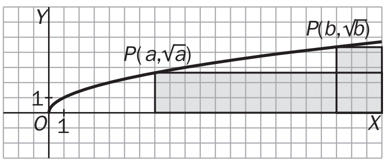
Calculamos en primer lugar la recta que une los puntos de la parábola de abscisas 1 y 3 para obtener la pendiente de la recta buscada:

La recta pasa por $A(1, f(1)) = A(1, 1)$ y por $B(3, f(3)) = B(3, 9)$, luego su pendiente es $m = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$.

Buscamos un número a tal que $f'(a) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$. El punto buscado tiene, pues, abscisa 2, y la ecuación de la tangente buscada pasa por $P(2, f(2)) = P(2, 4)$, y tiene pendiente $m = 4$, luego su ecuación es $y = 4x - 4$.

10.80. Dibuja la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$ y calcula las dimensiones del rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes y que tenga:

a) Máxima área **b) Máximo perímetro**



a) Calculemos el área del rectángulo en función de la abscisa x del punto $P(x, \sqrt{x})$.

Como la base mide $9 - x$, y la altura, $\sqrt{x}$, el área es $A(x) = \sqrt{x}(9 - x)$ con $x \in [0, 9]$.

Para hallar su máximo derivamos e igualamos la derivada a cero:

$$A'(x) = \frac{9 - x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{9 - 3x}{2\sqrt{x}};\ A'(x) = 0 \text{ si } x = 3$$

Como $A(0) = A(9) = 0$ y $A(3) = 6\sqrt{3}$, las dimensiones del rectángulo de área máxima son $6 \times \sqrt{3}$.

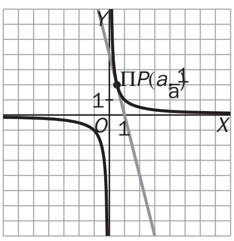
b) Calculemos el perímetro del rectángulo en función de la abscisa x del punto $P(x, \sqrt{x})$.

Como la base mide $9 - x$, y la altura, $\sqrt{x}$, el perímetro es $P(x) = 2(\sqrt{x} + 9 - x)$ con $x \in [0, 9]$. Para hallar su máximo derivamos e igualamos la derivada a cero:

$$P'(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right);\ P'(x) = 0 \text{ si } 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Como $P(0) = 18$, $P(9) = 6$ y $P\left(\frac{1}{4}\right) = 18{,}5$, las dimensiones del rectángulo de perímetro máximo son $\frac{35}{4} \times \frac{1}{2}$.

10.81. Considera la curva $y = \frac{1}{x}$. Demuestra que en cualquier punto, el segmento de recta tangente limitado por los ejes de coordenadas tiene como punto medio el punto de tangencia.



La recta tangente a la curva en el punto $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ tiene ecuación $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$, que corta a los ejes en los puntos $A\left(0, \frac{2}{a}\right)$ y $B(2a, 0)$. El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es

$$M\left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{\frac{2}{a} + 0}{2}\right) = P\left(a, \frac{1}{a}\right)$$, como queríamos demostrar.

10.82. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente por la fórmula $V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}00850437T^2 - 0{,}000679T^3$. Encuentra la temperatura a la que el agua tiene densidad máxima.

Como densidad $= \dfrac{\text{masa}}{\text{volumen}}$, tenemos que maximizar la función.

$d(T) = \dfrac{1}{999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}00850437T^2 - 0{,}000679T^3}$ en el intervalo [0, 30], que es equivalente a minimizar la función V(T) en dicho intervalo.

Derivando se obtiene $V'(T) = -0{,}06426 + 0{,}01700874T - 0{,}002037T^2$, que no tiene soluciones reales, y como $V(0) = 999{,}87$ y $V(30) = 987{,}26$, se concluye que la máxima densidad se da a 0 °C.

10.83. En ciertas condiciones del mercado, el coste de producción, en euros, de cada artículo fabricado por una empresa viene dado por la función:

$$c(n) = \left(\frac{n}{4} - 1\right)^3 - n + 8$$

donde n es el número, en miles, de artículos fabricados. ¿Cuál debe ser la producción de la empresa para minimizar el coste de cada artículo?

Debemos hallar el mínimo de la función c(n) con $n \in (0, +\infty)$. Derivamos la función:

$c'(n) = 3\left(\frac{n}{4} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0$ si $\left(\frac{n}{4} - 1\right)^2 = \frac{4}{3}$. Entonces, $n = \frac{4}{3}(3 + 2\sqrt{3}) \cong 8{,}618802\ldots \in (0, +\infty)$ o

$n = \frac{4}{3}(3 - 2\sqrt{3}) \cong -0{,}6\ldots \notin (0, +\infty)$

Así pues, la función tiene un mínimo en $n = \frac{4}{3}(3 + 2\sqrt{3})$, lo que supondrá que la fábrica debe producir 8618,802… artículos. Como esto no es posible, miramos en los enteros más próximos a ese valor para ver en cuál de ellos el coste es menor: $c(8{,}618) = 0{,}920798703$ y $c(8{,}619) = 0{,}920798572$.

Luego el número de artículos que minimiza el coste de producción es 8619.

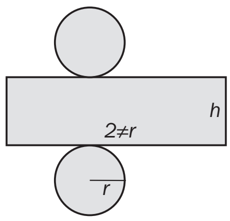
10.84. Una lata de cierto refresco tiene un volumen de 333 cm^3. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral.

Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.

1.° Nombramos las dimensiones de la lata: h, r.

2.° Queremos minimizar el coste del material. Teniendo en cuenta que el área lateral es $2\pi rh$ y el área de cada base πr^2, y que hay dos bases y la chapa de las bases cuesta el doble que la lateral, tenemos que la función a minimizar es

$$C = 2\pi rh + 4\pi r^2.$$



3.° Sabiendo que el volumen es de 333 cm^3, escribimos la relación entre las variables h y r.

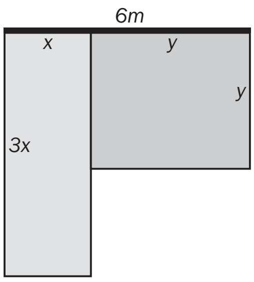
$V = \pi r^2 h = 333$, luego $h = \dfrac{333}{\pi r^2}$ y $C(r) = \dfrac{666}{r} + 4\pi r^2$

4.° Debemos minimizar $C(r) = \dfrac{666}{r} + 4\pi r^2$ con $r \in (0, +\infty)$.

$C'(x) = \dfrac{-666}{r^2} + 8\pi r.\ 0 = \dfrac{-666}{r^2} + 8\pi r \Rightarrow r^3 = \dfrac{333}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{333}{4\pi}} \cong 2{,}98 \in (0, +\infty)$

Como cerca de los extremos la función se hace arbitrariamente grande, $r = \sqrt[3]{\dfrac{333}{4\pi}}$ es un mínimo de la función y $h \cong 11{,}925\ldots$ tenemos que las dimensiones de la lata que minimizan el coste son, aproximadamente, de 3 cm de radio de la base y 12 cm de altura.

10.85. Un artista ha adquirido un listón de 6 metros de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja, y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?



Debemos minimizar la función $S = 3x^2 + y^2$, cuyas variables deben ser ambas positivas y estar sujetas a la relación $x + y = 6$.

Luego la función a minimizar es $S = 3x^2 + (6 - x)^2$ con $x \in [0, 6]$.

$S' = 6x + 2(6 - x) \cdot (-1) = 8x - 12 \qquad S'(x) = 0$ si $x = \frac{3}{2} \in [0, 6]$

Comparamos los valores de $S(0) = 36$, $S(6) = 108$ y $S\left(\frac{3}{2}\right) = 27$.

Luego la tela naranja debe medir $1{,}5 \times 4{,}5$ metros, y la verde debe ser un cuadrado de 4,5 metros de lado.

10.86. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

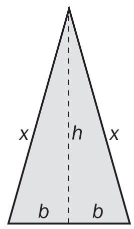
Sea x el menor y $(20 - x)$ el mayor. Queremos minimizar la función $S = (20 - x)^2 + 2x = x^2 - 38x + 400$, cuyo dominio es $[0, 20]$.

$S'(x) = 2x - 38 = 0 \Rightarrow x = 19$

En $x = 19$ se encuentra el vértice de la parábola $S(x)$, por tanto es efectivamente un mínimo. Los números son 19 y 1.

10.87. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 50 cm que tenga la mayor área posible.

Los lados del triángulo los llamamos x, x, 2b; la altura, h, siendo la función área $S = \frac{1}{2}(2b \cdot h) = b \cdot h$ la que hay que optimizar.



$x + b = 25 \Rightarrow b = 25 - x; \quad h = \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - (25 - x)^2} = \sqrt{50x - 625}$

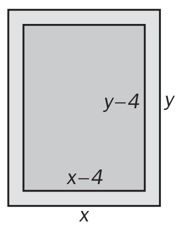
Sustituyendo se obtiene la función $S(x) = (25 - x)\sqrt{50x - 625}$ con dominio $\left(\frac{25}{2}, 25\right)$.

$S'(x) = -\sqrt{50x - 625} + \frac{25(25 - x)}{\sqrt{50x - 625}} = \frac{1250 - 75x}{\sqrt{50x - 625}}$, que se anula para $x = \frac{50}{3}$.

Como $S\left(\frac{25}{2}\right) = 0; \quad S(25) = 0; \quad S\left(\frac{50}{3}\right) = \left(25 - \frac{50}{3}\right)\sqrt{50 \cdot \frac{50}{3} - 625} = \frac{75}{3}\sqrt{\frac{625}{3}} = \frac{1875\sqrt{3}}{9}$

El área máxima se obtiene para $x = \frac{50}{3}$ cm; $2b = \frac{50}{3}$ cm; $h = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm, que corresponde al triángulo equilátero.

10.88. La página de un libro tiene un área de 600 cm². Si los cuatro márgenes miden 2 cm, calcula las dimensiones de la página para que la parte impresa sea la mayor posible.



La función a optimizar es $S = (x - 4)(y - 4)$, y como $x \cdot y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}$.

Sustituyendo se obtiene $S(x) = (x - 4)\left(\frac{600}{x} - 4\right)$ con dominio $(4, 150)$.

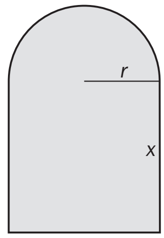
$S'(x) = \left(\frac{600}{x} - 4\right) + (x - 4)\left(\frac{-600}{x^2}\right) = -4 + \frac{2400}{x^2}$, que solamente se anula para el valor del dominio $x = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$.

Si estudiamos la monotonía de la función en el dominio obtenemos:

	$(4, 10\sqrt{6})$	$(10\sqrt{6}, 150)$
Signo de S′	+	−
Comportamiento de f	↗	↘

Que nos indica que el texto de mayor área se obtiene cuando $x = 10\sqrt{6}$ cm, $y = 10\sqrt{6}$ cm, es decir, la hoja es cuadrada.

10.89. (PAU) Se considera una ventana en la que la parte inferior es un rectángulo, y la superior, un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es 6 m, calcula las dimensiones de la parte rectangular para que entre un máximo de luz.



Para que entre el máximo de luz, la superficie debe ser máxima, luego queremos maximizar la función $S = 2rx + \frac{1}{2}\pi r^2$ con r y x positivas.

El perímetro nos da la relación entre las variables $P = 2r + 2x + \pi r = 6$.

Despejamos y sustituimos en la expresión de S:

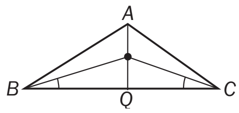
$x = 3 - \frac{2 + \pi}{2}r$; $S(r) = 2r\left(3 - \frac{2 + \pi}{2}r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$

Y para que x y r sean positivos, debe ser $r \in \left(0, \frac{6}{2 + \pi}\right)$.

Como $S'(r) = 6 - 4r - \pi r$, se anula para $r = \frac{6}{4 + \pi} \approx 0{,}84 \in \left(0, \frac{6}{2 + \pi}\right)$ y es un máximo de la función S, ya que se trata de una parábola y el valor obtenido es el vértice.

Como $x = 3 - \frac{2 + \pi}{2}r = 3 - \frac{2 + \pi}{2} \cdot \frac{6}{4 + \pi} = \frac{3(4 + \pi) - 3(2 + \pi)}{4 + \pi} = \frac{6}{4 + \pi} = r$, resulta que el rectángulo tiene la base, $2r = \frac{12}{4 + \pi}$ m, de doble longitud que la altura, $x = \frac{6}{4 + \pi}$ m.

10.90. En un triángulo isósceles ABC con AB = AC, BC = 4 y de altura sobre BC igual a 1, ¿dónde debemos escoger un punto de dicha altura para que la suma de las tres distancias a los vértices sea mínima?



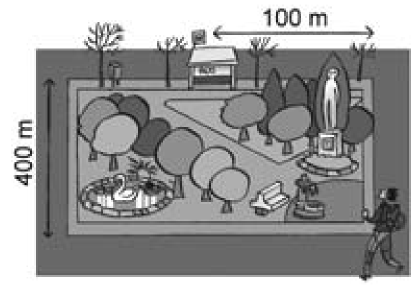
Sea $x = PQ$. Queremos minimizar $S(x) = 1 - x + 2\sqrt{x^2 + 4}$ con $x \in [0, 1]$.

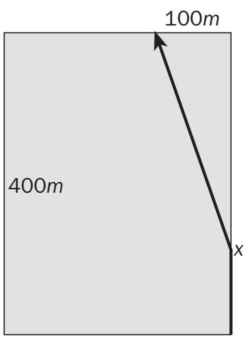
$S'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0$, cuyas soluciones son $x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \notin [0, 1]$ y $x = \sqrt{\frac{4}{3}} \notin [0, 1]$.

Luego el mínimo está en alguno de los extremos: $S(0) = 5$ y $S(1) = 2\sqrt{5}$; así pues, el mínimo se alcanza si $x = 1$.

10.91. Pedro se encuentra en la esquina de una calle que bordea un parque de 400 metros de ancho. Por otra calle paralela, al otro lado del parque, circula un autobús que le puede llevar a casa y que tiene la parada más próxima a 100 metros de la esquina como se muestra en la figura.

Pedro ve venir el autobús y comienza a correr. Si por la calle en la que está puede correr a 5 metros por segundo y, atravesando el parque, a 3 m/s, decide qué trayectoria deberá seguir para llegar a la parada lo antes posible.





Llamemos x a la distancia que Pedro hace por la calle.

La distancia que hace por el parque es $\sqrt{100^2 + (400 - x)^2}$.

El tiempo que queremos minimizar es $T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{100^2 + (400 - x)^2}}{3}$ con $x \in [0, 400]$.

Como $T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{2(400 - x)(-1)}{6\sqrt{100^2 + (400 - x)^2}} =$

$= \frac{3\sqrt{100^2 + (400 - x)^2} - 5(400 - x)}{15\sqrt{100^2 + (400 - x)^2}} = 0$, haciendo el cambio $y = 400 - x$ tenemos $3\sqrt{100^2 + y^2} = 5y$ y elevando al cuadrado $16y^2 = 9 \cdot 100^2$, $y = 75$ o $y = -75$.

La única solución de $x = 400 - y$ en [0, 400] es $x = 325$.

Como $T(0) = \frac{100\sqrt{17}}{3} \approx 137{,}4$, $T(325) = 65 + \frac{125}{3} = 106{,}\widehat{6}$, $T(400) = 80 + \frac{100}{3} = 113{,}\widehat{3}$, se concluye que a Pedro le conviene correr por la calle 325 m y después ir por el parque. De este modo tardará 1 min y $46{,}\widehat{6}$ s.

PROFUNDIZACIÓN

10.92. Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando directamente la definición de derivada.

a) $f(x) = \sqrt{x + a}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ (en ambos casos, $a \in R$, $a \neq 0$)

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h+a} - \sqrt{x+a}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h+a) - (x+a)}{h\left(\sqrt{x+h+a} + \sqrt{x+a}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{(x+h)^2 + a^2} - \sqrt{x^2+a^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 + a^2 - (x^2 + a^2)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + a^2} + \sqrt{x^2+a^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{(x+h)^2 + a^2} + \sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

10.93. Esboza la gráfica de la función $f(x) = x - x^3$ obteniendo previamente los elementos que consideres más significativos y encontrando la ecuación de la recta tangente en $P(-1, 0)$.

Una segunda recta que pasa por P es también tangente a dicha curva en Q(a, b). Calcula la ecuación de esa recta.

a) Su dominio es $(-\infty, +\infty)$, continua e impar, porque $f(-x) = -f(x)$.

Como $x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ corta al eje de abscisas en tres puntos: (0, 0), (1, 0) y (−1, 0).

$f'(x) = 1 - 3x^2$ se anula para $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $f''(x) = -6x$ se anula para $x = 0$.

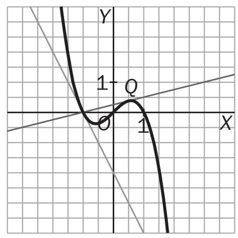
Como $f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, $f''\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, se deduce que para $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo relativo $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, para $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo relativo $m\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$ y para $x = 0$ hay un punto de inflexión $I(0, 0)$.

La tangente en (−1, 0) será $y - 0 = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y = -2x - 2$.

b) La otra recta pedida será también de la forma $y - 0 = m(x - (-1)) \Rightarrow y = m(x + 1)$, cortará a la curva en P y la tocará en Q, siendo, por tanto, una solución doble en Q de la ecuación $m(x + 1) = x - x^3$.

Resolvemos, $x^3 + (m - 1)x + m = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 - x + m = 0 \end{cases}$

Como esta última ecuación debe tener una solución doble, su discriminante tiene que ser cero: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; es decir, $1 - 4m = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{4}$. Pero esta pendiente es $f'(a)$, luego $\dfrac{1}{4} = 1 - 3a^2 \Rightarrow a = \pm\dfrac{1}{2}$ y, como se observa en la figura, la tangente buscada es en el punto $Q\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{8}\right)$ y pasa por $P(-1, 0)$ con pendiente $m = \dfrac{1}{4}$, es decir, $y = \dfrac{1}{4}(x + 1)$.



10.94. Esboza la gráfica de un polinomio de tercer grado sabiendo que el punto P(0, 3) está en dicha gráfica y que $f'(0) = f'(4) = 4$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = -\dfrac{4}{3}$.

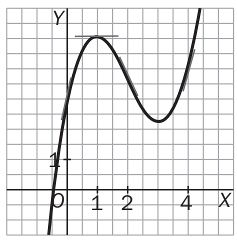
Dibujando las rectas tangentes se puede esbozar la gráfica.

En realidad podríamos determinar la función polinómica de tercer grado que cumple todas las condiciones exigidas, puesto que si es

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$ $f'(0) = 4 \Rightarrow c = 4$

Tendríamos $f(x) = ax^3 + bx^2 + 4x + 3$ y $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 4$

$\begin{cases} f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + 4 = 0 \\ f'(4) = 4 \Rightarrow 48a + 8b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{9} \\ b = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$



y la función obtenida $f(x) = \dfrac{4}{9}x^3 - \dfrac{8}{3}x^2 + 4x + 3$ cumple también que $f'(2) = -\dfrac{4}{3}$.

10.95. Escribe la fórmula para una función polinómica f tal que $f'(x) = 3x^2 + x + \frac{1}{2}$ y $f(1) = 7$.

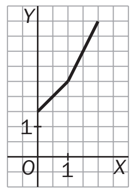
La función tiene que ser de la forma $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + d$, y como $f(1) = 7 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + d = 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 5$.

La respuesta es $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 5$.

10.96. Un profesor un poco despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función definida en el intervalo (0, 2) tal que:

$$f'(x) = 1, \text{ si } 0 < x \leq 1$$
$$f'(x) = 2, \text{ si } 1 < x < 2$$

y que además pase por el punto (1, 3). Los estudiantes intentan calcularla y se llevan una sorpresa. Intenta explicar qué es lo que ocurre.



La función pedida es $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$ y no es derivable en $x = 1$, por lo que el profesor debería haber dicho $f'(x) = 1$ si $0 < x < 1$.

10.97. Calcula los valores de a y de b para que sea derivable en todo R la función:

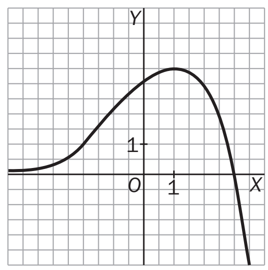
$$f(x) = \begin{cases} x + b & \text{si } x \leq 1 \\ bx + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable es condición necesaria que sea continua; por tanto, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 + b = b + a$, de donde se deduce que $a = 1$.

Además, las derivadas laterales tienen que ser iguales en todos los puntos, $f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 1 = b$.

10.98. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ con la siguiente información sobre su derivada:

- **Si $x < -2$, $f'(x) > 0$ y además f' es una función creciente.**
- **Si $-2 < x < 1$, $f'(x) > 0$, y además f' es una función decreciente.**
- **$f'(1) = 0$.**
- **Si $x > 1$, $f'(x) < 0$, y además f' es una función decreciente.**



Este problema adelanta el estudio de la curvatura que se verá en la unidad siguiente.

La función es creciente y cóncava para arriba en $(-\infty, -2)$.

La función es creciente y cóncava para abajo en $(-2, 1)$.

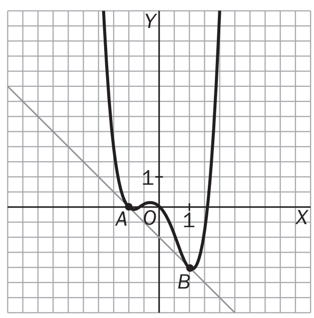
Si existe $f''(-2)$, hay un punto de inflexión para $x = -2$.

La función es decreciente y cóncava para abajo en $(1, +\infty)$.

En $x = 1$ presenta un mínimo relativo.

Por tanto, la función tendrá una forma como la de la figura.

10.99. Halla los dos puntos en los que la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ tiene la misma tangente.



Sean $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ los dos puntos de tangencia de la tangente común $y = mx + n$ a la curva, entonces la ecuación $x^4 - 2x^2 - x = mx + n$ ha de tener dos soluciones dobles, $x = a$ y $x = b$; por tanto,

$$x^4 - 2x^2 - (1 + m)x - n = (x - a)^2 \cdot (x - b)^2 =$$
$$= x^4 - 2(a + b)x^3 + (a^2 + b^2 + 4ab)x^2 - 2(ab^2 + a^2b)x + a^2b^2$$

Identificando los coeficientes se obtiene:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 + 4ab = -2 \\ -2 \cdot ab \cdot (a + b) = -(1 + m) \\ a^2 \cdot b^2 = -n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \\ m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$$

Luego la tangente común es $y = -x - 1$, y los puntos de tangencia, $A(-1, 0)$ y $B(1, -2)$.

10.100. (PAU) Sea $f: R \to R$ una función derivable, y a y b, dos soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ tales que entre ellas no hay ninguna otra solución de esa ecuación. Razona debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades para la ecuación $f(x) = 0$.

a) Entre a y b no tiene ninguna solución.

b) Entre a y b tiene una única solución.

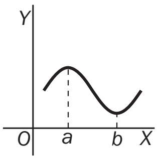
c) Entre a y b tiene dos o más soluciones.

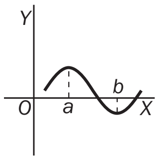
Como es derivable, también será continua en [a, b]. Si $f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ es monótona en el intervalo (a, b), es decir, crecerá o decrecerá en todos los puntos del intervalo.

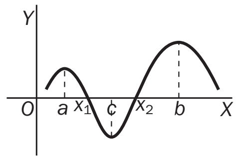
a) Es posible. Basta con que signo $f(a)$ = signo $f(b)$.

b) Ocurrirá siempre que signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$.

c) No es posible nunca porque eso implicaría que entre las dos soluciones, x_1, x_2, existiría otro valor c en el que habría un máximo o un mínimo relativo, y $f'(c) = 0$ con $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$.







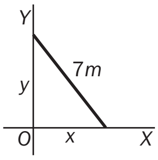
10.101. Una escalera de 7 metros de longitud está apoyada en una casa como indica la figura. Si la base de la escalera se separa de la pared a razón de 0,5 m/s, ¿a qué velocidad baja el extremo superior cuando la base dista de la pared las siguientes distancias?:

a) 2 m

b) 4 m

c) 6 m

Antes de calcular, piensa cuándo será mayor la velocidad.



$x = 0,5\ (\text{m/s}) \cdot t(\text{s}) = 0,5t$ metros

$$y = \sqrt{7^2 - (0,5t)^2}\ \text{m}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{-2(0,5t) \cdot 0,5}{2\sqrt{7^2 - (0,5t)^2}} = \frac{-0,25t}{\sqrt{49 - 0,25t^2}}\ \text{m/s}$$

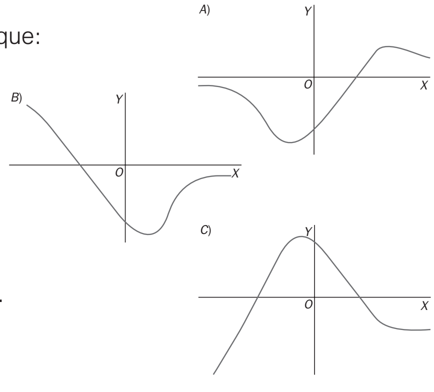
a) Si $x = 2$ m $\Rightarrow t = 4$ s $\Rightarrow v_y(4) = \dfrac{-0,25 \cdot 4}{\sqrt{49 - 0,25 \cdot 4^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{45}} \approx -0,149$ m/s

b) Si $x = 4$ m $\Rightarrow t = 8$ s $\Rightarrow v_y(8) = \dfrac{-0,25 \cdot 8}{\sqrt{49 - 0,25 \cdot 8^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{33}} \approx -0,348$ m/s

c) Si $x = 6$ m $\Rightarrow t = 12$ s $\Rightarrow v_y(12) = \dfrac{-0,25 \cdot 12}{\sqrt{49 - 0,25 \cdot 12^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \approx -0,832$ m/s

Nota: El signo negativo de la velocidad nos indica su sentido, hacia abajo.

10.102*. (PAU) Las ilustraciones A, B y C muestran las gráficas de una función f, su derivada f' y una función F tal que $F' = f$. Asocia cada gráfica a f, f' y F.



La gráfica B corresponde a la función F; la A, a $F' = f$, y la C, a f', porque:

- En el intervalo (a, m), F es decreciente y $F' = f$ es negativa.
- En el intervalo (m, b), F es creciente y $F' = f$ es positiva.
- En m, la función F tiene un mínimo relativo y $F'(m) = f(m) = 0$.
- En $(a, i_1) \cup (i_2, b)$, F es cóncava para abajo y $F'' = f'$ es negativa.
- En (i_1, i_2), F es cóncava para arriba y $F'' = f'$ es positiva.
- En i_1, F tiene un punto de inflexión; f, un mínimo, y $F''(i_1) = f'(i_1) = 0$.
- En i_2, F tiene un punto de inflexión; f, un máximo, y $F''(i_2) = f'(i_2) = 0$.
- En $(a, i_1) \cup (i_2, b)$, f es decreciente, y f' es negativa.
- En (i_1, i_2), f es creciente, y f' es positiva.